MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO :

¿Aburrirse o pensar?

José Antonio de la Peña
Director del Instituto de Matemáticas, UNAM.

Mefistófeles: ¿Es correcto, pregunto, es incluso prudente,
aburrirse a sí mismo y aburrir a los estudiantes?
Fausto. Johann W. Goethe.

Como bien sabemos todos nosotros, y como también lo recuerdan nuestros padres y abuelos, las matemáticas forman una parte esencial –medida en el número de horas que se le dedican cada mañana— de la educación que se imparte desde los primeros años de la escuela primaria hasta, por lo menos, el bachillerato. Algunos de los estudiantes que continúan hacia una carrera universitaria siguen aprendiendo matemáticas, muchos otros eligen su carrera tratando de evitar más clases de matemáticas.

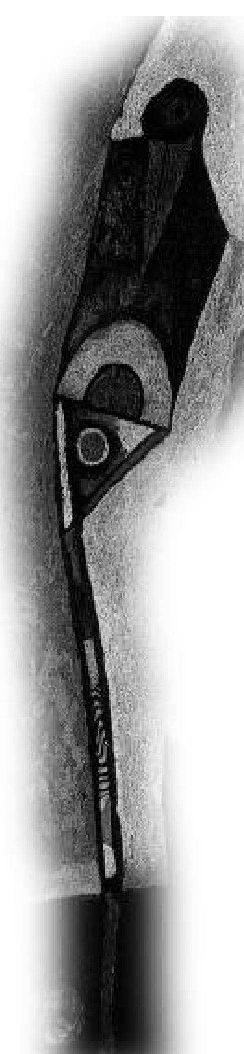
El lugar especial de las matemáticas en el pensamiento humano, en particular en la educación, tiene un primer florecimiento en la Grecia clásica. Se dice que los filósofos griegos, en tiempos de Platón, colocaban a la entrada de sus escuelas el anuncio: "No entre a esta Escuela aquél que no haya aprendido los *Elementos* de Euclides". Para estos filósofos, la naturaleza estaba escrita en el lenguaje de las matemáticas y, por tanto, el estudio de las matemáticas era inseparable de la labor del filósofo. Los legados magníficos de los pensadores griegos de estos tiempos incluyen el Teorema de Pitágoras; los fundamentos de la geometría axiomática tal como fue desarrollada en los cinco tomos de los *Elementos*; el descubrimiento de todos los poliedros regulares, también llamados sólidos platónicos y una gran cantidad de estudios de curvas geométricas planas.

Poco tiempo después, Aristóteles insiste en que la filosofía se desvía de sus fines si trata de seguir los métodos matemáticos en sus propias indagaciones. Debido a la profunda influencia de Aristóteles en la filosofía posterior, las matemáticas fueron desplazadas de su lugar especial en el desarrollo del pensamiento, papel que no recuperarían sino hasta los tiempos de Descartes y los filósofos de la Ilustración francesa en los siglos XVII y XVIII. Para Galileo, Descartes y Newton, la estructura del mundo es matemática y, por lo tanto la base de las ciencias de la naturaleza debe ser matemática también. A partir de entonces, las matemáticas han estado en el centro de toda la actividad científica y su papel central en la educación ha ido en aumento.

Cuando Napoleón toma el poder en Francia, se hace asesorar por una pléyade de pensadores y científicos, entre los que se contaban Laplace y Lagrange. Por recomendación de algunos de ellos, se decide realizar una reforma educativa en la cual las matemáticas pasan a ocupar el papel central que antes correspondía al latín. Para los educadores que realizan la reforma hay algunos elementos comunes entre el latín y las matemáticas como materias de enseñanza: desarrollan el pensamiento abstracto, permiten una rigurosa selección de los mejores estudiantes que pasarán a formar la élite dirigente; por otra parte, las matemáticas permiten el desarrollo del pensamiento lógico en contraposición del discurso retórico fomentado con la enseñanza del latín. Desde entonces, las matemáticas ocupan un papel central en el *curriculum* de la mayor parte de los países del mundo.

En la época de Napoleón los programas de matemáticas en diferentes niveles ponían especial énfasis en las operaciones aritméticas, en la capacidad de hacer cuentas mentalmente, en la enseñanza de la geometría siguiendo el método axiomático de los *Elementos*, propiedades de triángulos y círculos y las fórmulas trigonométricas. Las mismas cosas que se continuaban enseñando de la misma manera hasta la Reforma Educativa de mediados de este siglo (en Francia, claro está, porque en México, las primeras reformas se dieron en los años 70). A partir de entonces se han producido importantes cambios en la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles educativos, siendo el de mayor trascendencia el que se originó en Estados Unidos por la publicación del estudio *On the Mathematics Curriculum for the High School* firmado por destacados matemáticos y en donde se proponía la introducción en la enseñanza de:

> *Las matemáticas modernas. En vista de la falta de conexión entre las diferentes partes del plan actual, los grupos que trabajan en la elaboración del nuevo plan de matemáticas harían bien en introducir conceptos generales unificadores. Pensamos que el uso de la teoría de los conjuntos y de los conceptos del álgebra abstracta pueden dar más coherencia y unidad al plan de la enseñanza.*



La historia de los fracasos y pequeños éxitos de las sucesivas reformas a los planes y programas de enseñanza de las matemáticas ha sido ampliamente documentado. Después de las sucesivas crisis se ha llegado a propuestas de programas de enseñanza que enfatizan la adquisición de habilidades por parte del alumno. Muchos pensamos que este es el enfoque más adecuado. Sin embargo, muchos problemas subsisten En estas notas deseamos referirnos a dos de los principales problemas que parecen tener los cursos de matemáticas a pesar de todas las reformas efectuadas: por un lado, resultan aburridos para la mayor parte de los estudiantes; por otro, pocos parecen entender la utilidad e importancia de lo que se enseña. Estos dos asuntos corresponden a la mayor parte de las quejas sobre los cursos de matemáticas desde los niveles más elementales y se escuchan tanto en boca de alumnos como de profesores. Estas quejas no son privativas de México, ni de la educación pública, aunque por supuesto hay variaciones importantes entre diferentes escuelas, sistemas educativos y países.

Evidentemente, no tenemos fórmulas mágicas que recomendar, pero creemos que el nivel bachillerato ofrece una serie de posibilidades para cambiar la impresión de los estudiantes y profesores sobre el interés y atractivo de los cursos de matemáticas. Creemos que cursos adecuados, tanto desde el punto de vista del contenido como de la forma de ser enseñados, conseguirían un impacto importante sobre la formación integral del estudiante.

¿Qué son las matemáticas para un estudiante que ingresa al bachillerato?

> — ...odio todo lo que tiene que ver con matemáticas.
> — ¿Por qué?
> — "Si dos panaderos hacen 444 trenzas en seis horas, ¿cuánto tiempo necesitarán cinco panaderos para hacer 88 trenzas?" ¡Qué idiotez! –siguió despotricando Robert_ . Una forma idiota de matar el tiempo.
> — ¿De dónde te has sacado esa historia de las trenzas? Seguro que del colegio.
> — ¡Y de dónde si no! –dijo Robert_. El señor Bockel, ese principiante que nos da Matemáticas, siempre tiene hambre, a pesar de estar tan gordo. Cuando cree que no lo vemos por estar haciendo los deberes, saca una trenza de su maletín y se la devora mientras nosotros hacemos cuentas.
> — ¡Vaya! –exclamó el diablo de los números, sonriendo con sorna_. No quiero decir nada en contra de tu profesor, pero la verdad es que eso no tiene nada que ver con las matemáti-

cas. ¿Sabes una cosa? La mayoría de los verdaderos matemáticos no saben hacer cuentas. Además, les da pena perder el tiempo haciéndolas...(1)

No necesitamos esforzarnos mucho para recordar comentarios de compañeros de estudio, tal vez comentarios de nosotros mismos, acerca de alguna clase de matemáticas:

- ¡Qué clase tan aburrida! Siempre haciendo cuentas.
- Eso, ¿a quién le interesa?
- ¿Para qué sirven las cosas que nos enseñan?
- No entendí nada, ¡es muy difícil!

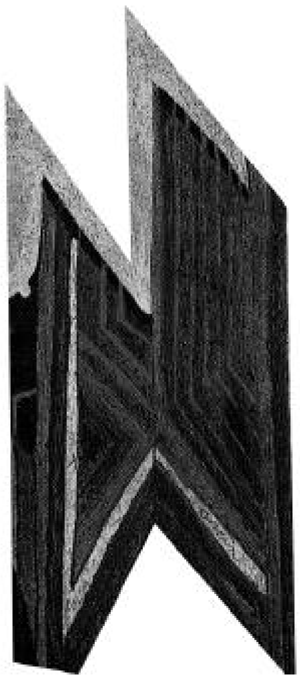
Este tipo de comentarios, incluso actitudes negativas hacia las matemáticas y la forma en que se enseñan, tienen una historia tan larga como la enseñanza misma de las matemáticas.En el año 400 d.C., San Agustín, uno de los padres de la Iglesia católica, decía:

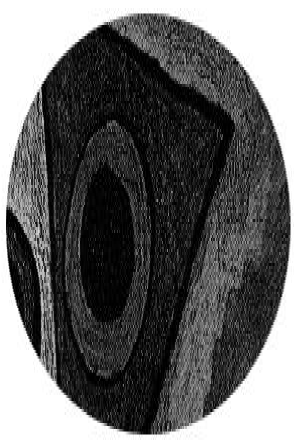
«El buen cristiano tiene que estar alerta en contra de los matemáticos y de todos aquellos que hacen profecías vacuas. Existe el peligro de que los matemáticos tengan pacto con el demonio y la misión de ofuscar el espíritu del hombre para confinarlo a los linderos del infierno.»

Como nos hace ver Mefistófeles al hablar con Fausto sobre la enseñanza de las matemáticas, Goethe no era admirador de éstas. Tampoco lo fueron los filósofos Kant y Schopenhauer. Muchos de los estudiantes actuales no tienen opiniones muy diferentes de las que tenían San Agustín, Goethe o el niño Robert. ¿Por qué en todo este tiempo no se ha encontrado la forma para hacer más atractiva e interesante la enseñanza de las matemáticas?

Generalmente, el primer acercamiento de los niños a las matemáticas se da en el aprendizaje de los números y posteriormente de las operaciones elementales con ellos. Típicamente esto corresponde a aprender a contar, a la mecanización de la suma y la multiplicación y por supuesto, a la memorización de las tablas de multiplicación. Un ejemplo de lo mecánico que resulta este aprendizaje y de lo ajeno al razonamiento lo dio hace unos años, la educadora francesa Stella Baruk cuando realizó una encuesta en-

(1) *El diablo de los números.* Hans M. Enzensberger.





tre niños franceses de primero y segundo grados de instrucción elemental. A la pregunta: “En un barco van 12 ovejas y 13 cabras, ¿cuál es la edad del capitán del barco?” El 70% de los niños contestó: ¡25 años!

A lo largo de la primaria y secundaria, el estudiante resuelve problemas con enunciados semejantes a los siguientes:

- Un campesino vende un saco de papas en 100 pesos. Sus gastos de producción son de 4/5 partes del precio de venta.
- ¿Cuál es la ganancia del campesino? Hace tres años la edad de Nicolás era de x años, dentro de 9 años será el cuadrado de ese número. Calcular la edad actual de Nicolás.
- Calcular la ecuación del lugar geométrico dado por una circunferencia de radio 2 y centro en (1,3).

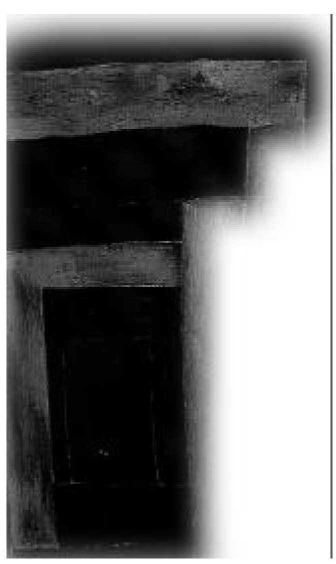
Creemos que no será necesario discutir largamente la falta de atractivo de estos problemas para la mayoría de los estudiantes, ni la utilidad de ellos en la vida cotidiana. No se trata, por supuesto, de negar la importancia de saber resolver problemas como los enunciados, pero entendemos a los estudiantes que se sienten decepcionados y aburridos de no aprender más que variantes de estos problemas. Las sucesivas reformas a la enseñanza de las matemáticas han mostrado a los estudiantes una gama más amplia de problemas e ideas, sin embargo las dificultades siguen ahí.

Tal vez motivados por este desencanto generalizado por las clases de matemáticas, comienzan a darse en algunos países reacciones en contra de la enseñanza intensiva de las matemáticas en los diferentes grados escolares. En 1995 en Alemania, se publicó el trabajo de habilitación en pedagogía de H. W. Heymann. En su trabajo, este pedagogo sostiene que todo lo que el ciudadano común requiere de matemáticas lo aprende en los primeros siete años de enseñanza formal. Todo lo que viene después es ocioso y está condenado al olvido.
Por ejemplo, sugiere que debe de ser eliminado de la enseñanza secundaria y de bachillerato el estudio de las ecuaciones cuadráticas, la trigonometría, los logaritmos y el concepto de *función*, este último porque le parece demasiado abstracto. En Estados Unidos apareció recientemente el libro *Humble Pi* del profesor en sicología Michael Smith donde

aconseja que se dé a los estudiantes de bachillerato la libertad de decidir si quieren estudiar matemáticas, que en todo caso se disminuya el número de horas de enseñanza de las matemáticas y se dejen de preocupar por las calificaciones en esta asignatura.

Probablemente el libro de Smith esté motivado por frustraciones personales, pues insiste que los matemáticos creyendo en la “supremacía” de su campo, tratan de “hacer sentir a todo mundo tonto... en todo”, pero en todo caso, se encarga de demostrar con lujo de detalles que él no entiende gran cosa de matemáticas. Como ejemplo de cómo usar algunas fórmulas matemáticas para resolver problemas rápidamente, pregunta cuánto es mayor la suma de todos los números del 101 al 200 que la suma de todos los números del 1 al 100. Luego de explicar que la suma del 1 al número n es $n(n+1)/2$, calcula las sumas de 101 al 200 y le resta la suma de 1 al 100, y obtiene 15,050 ¡que es una respuesta incorrecta! En realidad este problema se puede resolver fácilmente *pensando*, en lugar de aplicar fórmulas: en efecto, cada número entre 101 y 200 es de la forma $100+n$, donde n está entre 1 y 100, luego la solución del problema es 100x100=10,000.

¿Qué pasaría si las sugerencias de Heymann o Smith se impusieran? Aparte de la mayor ignorancia de los individuos, estas propuestas desalentarían a estudiantes a acercarse a las matemáticas y en general a las ciencias exactas. Peor aún, los estudiantes perderían las habilidades que se desarrollan al estudiar y resolver problemas de matemáticas: la disciplina, la atención, la precisión, el desarrollo de las capacidades de abstracción y sobre todo el desarrollo del pensamiento lógico. No puedo pensar en algo más grave para los profesionistas del futuro (en cualquier profesión). Finalmente, como lo dice el propio Smith, los estudiantes podrían concentrarse en otros temas (los que piensen que son los importantes): administración, publicidad, desarrollo de video juegos, televisión de calidad.



Y después de tanto estudiar, ¿quién sabe matemáticas?

> En ciento setenta y seis años, el Mississippi ha perdido doscientas cuarenta y dos millas de longitud; o sea, una milla y un tercio al año, en promedio. Por tanto, cualquier persona común y corriente que no sea ciega o idiota, puede sacar una conclusión evidente: en el lejano período Oolítico Silúrico (de eso hará un millón de años en noviembre), el Mississippi tenía una longitud de más de un millón trescientas mil millas, y se lanzaba a través del golfo de México como una caña de pescar. Del mismo modo es fácil darse cuenta que dentro de setecientos cuarenta y dos años nuestro río medirá sólo una milla y tres cuartos; para entonces, El Cairo y Nueva Orleans habrán unido sus calles y seguirán viviendo tranquilamente con un único alcalde y un cuerpo común de concejales. La ciencia tiene cosas fascinantes(2).

Al terminar los estudios de bachillerato,una persona ha recibido 12 años de educación matemática. En muchos casos esto representa toda la matemática que la persona estudiará en su vida, y probablemente debería ser suficiente para la mayor parte de las necesidades de la vida cotidiana. Pero ¿ qué sabe realmente de matemáticas?

En un número reciente del *Notices* de la American Mathematical Society, Roman Kossak hacía un recuento de las carencias matemáticas de los estudiantes que ingresan a *High School* en los Estados Unidos: no saben mucho de aritmética o álgebra, no pueden trabajar a un nivel abstracto, no pueden relacionar lo que saben con el mundo a su alrededor. En fin, concluye que el actual modelo de educación matemática de los Estados Unidos será recordado como un “fracaso espectacular”.

En una encuesta realizada recientemente en la zona urbana de la Ciudad de México entre 800 adultos, el 38% reportó haber concluido los estudios de bachillerato. Adicionalmente se entrevistaron a 200 estudiantes de la UNAM. La encuesta pretendía obtener datos básicos acerca del nivel de conocimientos elementales en ciencias y en matemáticas en la población de la Ciudad de México. Sobre ma-

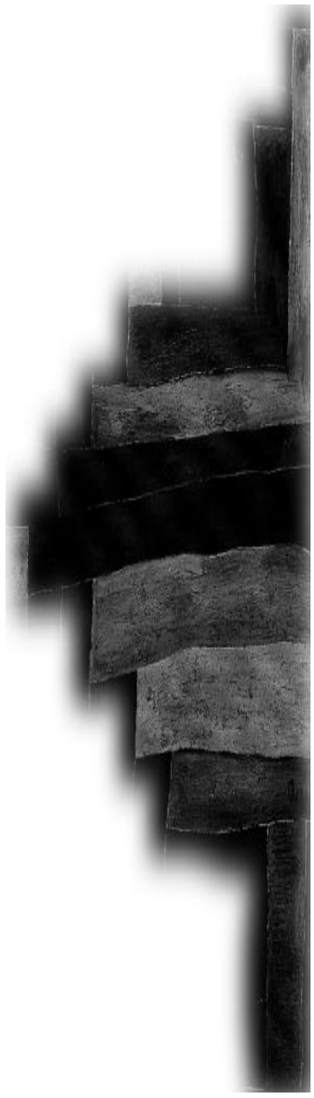
(2)Vida en el Missisipi,
Mark Twain.

temáticas se formularon (entre otras) las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto es un medio por un medio?
2. Después de que en dos volados sucesivos salen dos águilas, ¿cuál es el resultado más probable del tercer volado?
3. Un niño juega con tres cubos de madera, uno blanco, uno verde y otro rojo, ¿cuántas torres verticales diferentes puede formar?

Los resultados en todos los casos fueron reprobatorios: a la primera pregunta contestó correctamente el 30% de la población general y 53.5% de la población universitaria; a la segunda pregunta, contestó correctamente el 38.6% de la población general y el 47.5% de la universitaria; finalmente, a la tercera, alrededor del 21% contestó correctamente en los dos grupos. Esto muestra claramente que la mayoría de los mexicanos (aún los que tienen educación universitaria) no son capaces de resolver problemas que involucren conceptos matemáticos elementales.

Pero las cosas son peores. En la sección *Crushing Numbers* de la revista *The Economist* fue citado el siguiente reporte de las autoridades de la Ciudad de México: el viaducto Miguel Alemán había aumentado su capacidad gracias a las acertadas decisiones del gobierno. En efecto, como el viaducto no era suficiente para el tráfico de la ciudad, se decidió convertirlo de dos a tres carriles en cada sentido, aumentando su capacidad en 50%. Puesto que esto se realizó por el simple mecanismo de repintar las líneas de los carriles, estos resultaron demasiado estrechos para los automóviles, por lo que se regresó a los dos carriles en cada sentido. Esto redujo la capacidad del viaducto en una tercera parte. Luego, razonaban, hubo un incremento neto de la capacidad del viaducto del 16% aproximadamente.



Una oportunidad para aprender a pensar.

> Profesor: ¿Cuánto resulta, por ejemplo, de multiplicar tres mil millones setecientos cincuenta y cinco millones novecientos noventa y ocho mil doscientos cincuenta y uno por cinco mil millones ciento sesenta y dos millones trescientos treinta y tres mil quinientos ocho?
> Alumna(contestando muy rápido): Resulta diecinueve millones de billones trescientos noventa mil billones dos billones ochocientos cuarenta y cuatro mil millones doscientos diecinueve millones ciento sesenta y cuatro mil quinientos ocho...
> Profesor (asombrado): ¿Pero, cómo sabes eso si no conoces los principios del razonamiento matemático?
> Alumna: Fácil. Como no puedo confiar en mis razonamientos, memoricé los resultados de todas las posibles multiplicaciones.(3)

Los problemas que preguntamos en nuestra encuesta citada más arriba no eran preguntas que tuvieran que resolverse ‘haciendo cuentas’ o ‘aplicando fórmulas’, que es lo que mucha gente cree que son las matemáticas. Se trataba de pensar un poco, lo mismo que en el problema que Smith resolvió (sin pensar) equivocadamente. No tiene mayor interés saber multiplicar números grandes, para eso hay calculadoras. Lo importante es entender cómo y por qué se multiplica de la manera en que nos enseñan. Si entendemos, no olvidamos.

Además de contar y hacer operaciones elementales con los números, las matemáticas deben ser vistas como un entrenamiento de la razón, como una forma de ejercicio del pensamiento y el espíritu crítico. Por supuesto, estas habilidades deben poder ser aplicadas después a la solución de todo tipo de problemas, se trate de problemas matemáticos o no.

Entender permite generalizar. Si entendemos cómo se resuelve un problema, podremos volver a aplicar el método para resolver otros problemas similares. Podremos también imaginar situaciones a las que nuestros sentidos no pueden tener acceso. Pensemos por ejemplo, en un espacio de cuatro dimensiones. ¿Cómo podemos pensar en cuatro dimensiones si nuestro mundo sólo tiene tres y nuestros sentidos no tienen acceso a otros mundos?

El método de las matemáticas es el razonamiento lógico y riguroso para *demostrar* que las afirmaciones son ciertas o falsas. Para que una afirmación sea cierta no basta con que lo parezca, no basta que lo diga el maestro. Sabemos que una afirmación es cierta sólo cuando se ha dado un argumento completo que demuestra lógicamente la afirmación. ¿Cuánto tiempo tarda en demostrar que las siguientes afirmaciones son ciertas?

(3)*La lección*
Eugéne Ionesco

- Me dan una cuerda de más de 40,000 km., o sea, la longitud necesaria para rodear la tierra por el ecuador. Tomamos la cuerda y la estiramos sobre los océanos y selvas. Al finalizar, notamos que sobra un metro. Para subsanar el error, decidimos atar los cabos y distribuir los 100 cm. restantes uniformemente sobre los 40,000 km. ¿cuánto se separa la cuerda de la tierra a lo largo de los 40,000 km? Respuesta: más de 16 cm.
- Hay infinitos números primos.

¿Qué podemos hacer en nuestros bachilleratos?

Aquí va una serie de ideas sueltas de tareas que deben realizarse para ir haciendo a las matemáticas más amenas, divertidas e interesantes para los estudiantes...y probablemente también para los maestros. Esta lista incluye algunas tareas que pueden ser emprendidas por los maestros en sus clases, algunas tareas que pueden emprenderse en grupos y otras que corresponde impulsar a la institución. Estas ideas no pretenden ser originales, ni formar un todo organizado o el esquema de un programa.

- **Las matemáticas como parte de la cultura.** En todos los cursos y prácticamente todos los temas, se puede introducir el contexto histórico y cultural que produjo el desarrollo de las ideas matemáticas. Referirse a la motivación que llevó a la consideración del problema tratado y su solución. Sin duda, es más enriquecedor considerar temas con un amplio contexto histórico y cultural. Como ejemplos simples podemos pensar en el desarrollo de la trigonometría y las proyecciones esféricas asociadas a la cartografía; la geometría proyectiva asociada a la perspectiva en el arte y otros muchos temas.
- **Lógica a través de la literatura.** Un ejercicio siempre interesante es considerar la consistencia interna de los discursos y notas periodísticas. Pueden seguirse los razonamientos lógicos de las novelas policíacas. Por supuesto, hay también algunos libros directamente inspirados en matemáticas como *Alicia en el país de las maravillas* de Carroll o *Planilandia* de Abott.
- **Uso de material de revistas de divulgación especializadas.** Esto permite el tratamiento de un amplio número de temas de manera original. Hay una gran cantidad de artículos interesantes tanto de matemáticas, como sobre las matemáticas en el contexto cultural en revistas como *Scientific American* y *Mathematical Intelligencer*.
- **Desarrollo de páginas de internet.** Estas páginas pueden tratar de manera lúdica una gran variedad de temas matemáticos en diferentes niveles y su contexto cultural. Además pueden organizar la navegación en internet de manera inteligente y orientada temáticamente. Ejemplos de este tipo de páginas pueden encontrarse en la página Web del Instituto de Matemáticas de la UNAM.
- **Creación de talleres de matemáticas.** Muchos de estos talleres ya son una realidad. Este tipo de actividades podrían otorgar créditos en los estudios de bachillerato.
- **Programas de difusión.** Por supuesto, hay una gran cantidad de programas de difusión. Creemos que debería de hacerse un esfuerzo por impulsar programas que vinculen el bachillerato con los institutos de investigación y las facultades de las universidades.
- **Estándares.** Una tarea importante será desarrollar los estándares básicos de lo que debe ser la enseñanza de las matemáticas en bachillerato, recomendaciones para planes, programas y textos. Una tarea de esta envergadura requiere el trabajo sistemático y organizado de un buen número de profesores. Regresa a ENP o a Difusión

Referencias.

Hans M. Enzensberger: *El diablo de los números*. Editorial Siruela (1998).

M. Barot y J.A. de la Peña:" ¿Cuánto tarda la tierra en dar una vuelta completa alrededor del sol en México?" *Este País*. Febrero 1999.

M. Barot y J.A. de la Peña:" ¿Cómo fueron tus clases de matemáticas?" *Este País*. Mayo de 1999.

J.A. de la Peña:" Enseñanza de las Matemáticas: la crisis de las reformas". *Revista de la Universidad Nacional*. Marzo de 1999.

H.W. Heymann: *Allgemeinbildung und Mathematik*. Habilitationsschrift. Bielefeld (1995).

M. Kline: *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. St. Martin Press (1973).

R. Kossak: "Why are we learning this?"*Notices AMS*. November 1995.

M. Smith: *Humble Pi: The Role that Mathematics Should Play in American Education*. Prometeus (1995).