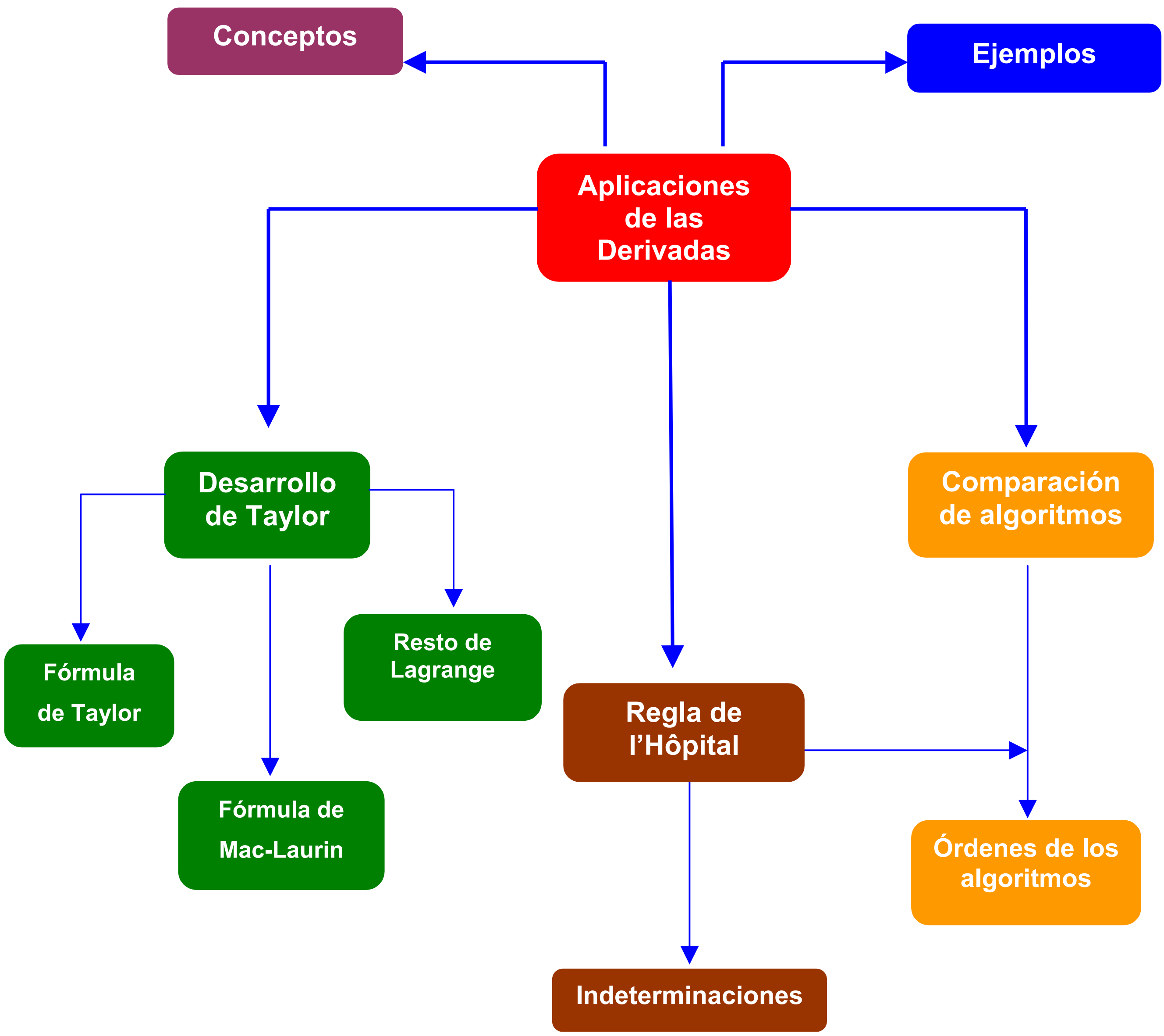
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Empezaremos el Math-block hablando de la aproximación polinómica a una función cualquiera en un punto dado de su dominio. Se presenta el proceso de construcción del polinomio de Taylor que aproxima una función cualquiera alrededor de un punto cualquiera del dominio (si el polinomio se desarrolla para describir el comportamiento de la función alrededor de cero recibe el nombre de polinomio o serie de Mac-Laurin).

La aproximación de una función hace que se pueda resolver, de forma numérica, muchas situaciones cuyas funciones son difíciles de manejar. De hecho, en informática, en los software, se utiliza mucho las aproximaciones polinómicas.

Después hablaremos de la Regla de l'Hôpital, que nos ayudará a calcular límites derivando funciones.

Por último determinaremos cuál de dos algoritmos es más eficiente, el mejor, i.e.: cuál de los dos requiere de un tiempo de computación menor para llegar a la solución. Para determinar cuál de los dos es más eficiente, recurriremos al concepto de límite en el infinito y a la regla de l'Hôpital.

OBJETIVOS

1. Calcular el polinomio que mejor aproxima una función alrededor de un punto, y utilizarlo para evaluar la función de forma aproximada.
2. Comparar el polinomio de Taylor con la función original, numérica y gráficamente.
3. Calcular límites indeterminados por medio de la regla de l'Hôpital.
4. Comparar el orden de magnitud de las funciones más usuales en el cálculo de la complejidad de un algoritmo.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir con éxito esta unidad es recomendable haberse leído los siguientes Math-blocks: Uso básico del Mathcad, Funciones de una variable, Límites de funciones y Derivación.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Fórmula de Taylor

Si f es n veces derivable en x = a, el polinomio siguiente se llama **polinomio de Taylor de grado** n **en** x = a.

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

La diferencia f(x) **-** $P_{n,a}(x)$ se llama **resto o Error,** y se designa por $R_{n,a}(x)$.

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x) \Rightarrow f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Teorema de Taylor:

1. Si f es una función con derivada n-ésima en x = a, se cumple

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

2. Si en un entorno E(a) existe f $^{n+1)}$(x), entonces $\forall x \in$E(a) existe algún c, comprendido entre a y x, tal que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ ***(Resto de Lagrange)***.

Con lo que el **desarrollo de Taylor con el residuo de Lagrange** queda así:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Cuando a = 0 se llama **fórmula de Mac-Laurin**.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Esta última expresión es el **desarrollo de Mac-Laurin con resto de Lagrange**.

Ejemplo: Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 para la función $f(x) = xsinx$ en el punto x=0

Solución:

La expresión del polinomio de Taylor de grado 2 para f(x) en el punto x=0 viene dado por $P_{2,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$. Así si calculamos la primera derivada y la segunda en el punto x=0, así como $f(0)$ obtenemos:

$$f(x) = xsinx \Rightarrow f(0) = 0sin0 = 0$$
$$f'(x) = sinx + x\cos x \Rightarrow f'(0) = sin0 + 0\cos 0 = 0$$
$$f''(x) = \cos x + \cos x + x(-sinx) \Rightarrow f''(0) = \cos 0 + \cos 0 + 0(-sin0) = 2$$

Substituyendo, $P_{2,0}(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{2}{2!}(x-0)^2 = x^2$

Regla de l'Hôpital

Para resolver límites indeterminados del tipo 0/0 , ∞/∞, se utiliza la regla de l'Hôpital.

Regla de l'Hôpital:

Sean f y g dos funciones que cumplen:

a) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$

b) Existen f'*(x) y* g'(x) en un entorno de E(c), salvo, quizás, en x = c.

c) $\forall x \neq c$, g(x) y g'(x) no se anulan en E(c).

En tales condiciones si $\exists \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

<u>Variantes de la regla de l'Hôpital:</u>

Todas ellas se pueden resumir así:

Si $\lim_{x\to i} f(x) = \lim_{x\to i} g(x) = j$, y $\exists \lim_{x\to i} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \Rightarrow \lim_{x\to i} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

Donde i puede ser un número real c, c+, c-, + ∞, - ∞.

j puede ser 0, + ∞ , -∞.

k puede ser un número real L, + ∞ , -∞.

Se puede aplicar reiteradamente la regla de l'Hôpital, derivando varias veces hasta que desaparezca la indeterminación.

Ejemplo: Es evidente que $\lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^2} = 6.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = 6\cdot 1\cdot\frac{1}{0} = \infty$. Sin embargo, al aplicar la regla de L'Hôpital resulta $\lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{-\sin x}{6x} = -1$. ¿Dónde está el fallo?.

<u>Solución</u>:

Dado que $\lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$ (Indeterminación), aplicaremos L'Hôpital $\lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{\cos x}{3x^2} = 6\cdot\frac{1}{0} = \infty$. Por tanto ya no hay indeterminación. El error se comete al aplicar L'Hôpital 2 veces, cuando ya no debe hacerse por no haber indeterminación.

Comparación de algoritmos

La complejidad de un algoritmo es una estimación del número de operaciones (tanto aritméticas como lógicas) que realizará el algoritmo en función de los datos de entrada. Nos centraremos en aquellos casos en los que el número de operaciones del algoritmo dependa de un único dato de entrada (input), n, donde n es natural.

Se utiliza la notación *O*(*f*(*n*)), donde *f* es una función de una variable, para denotar que un algoritmo tiene que realizar *kf*(*n*) operaciones (*k* es una constante) para obtener un valor de salida a partir de la entrada *n*. Así, si un algoritmo realiza $4n^5$ operaciones antes de dar el resultado, diremos que tiene una complejidad del orden n^5, y lo anotaremos $O(n^5)$. La complejidad algorítmica se traduce, entonces, en coste computacional y se intenta minimizar al diseñar un algoritmo.

En este apartado veremos cómo comparar estas funciones entre sí, utilizando límites al infinito, teniendo en cuenta que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(n) = L$ *($n \in \mathrm{N}$).*

Ejemplo: Consideremos 2 algoritmos que necesitan $f(n)=n^5+2n+2$ y $g(n)=n^5-n^2+65$ operaciones, respectivamente, para llevar a cabo un mismo cálculo. ¿Cuál es más rápido?.

Solución:

Dando valores vemos que $f(n) < g(n)$ $\forall n < 11$. Por el contrario, $\forall n \geq 11$, $f(n) > g(n)$. Sin embargo para valores grandes de n, no hay una diferencia relativa apreciable entre ambas funciones:

$\frac{f(n)}{g(n)} \approx 1$, para n grande. Diremos, entonces, que f y g son del mismo orden de magnitud, y que los dos algoritmos tienen, también, la misma complejidad.

Definiciones

Sean f(n), g(n) funciones tales que:

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$$

Decimos que f y g son del **mismo orden de magnitud** cuando $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty$. En este caso , escribiremos $f(n) \approx g(n)$ o bien O(f(n))=O(g(n)).

Decimos que f tiene **orden de magnitud superior** a g cuando $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$. En este caso , escribiremos $f(n) >> g(n)$ o bien O(f(n)) > O(g(n)).

Decimos que f tiene **orden de magnitud inferior** a g cuando $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. En este caso , escribiremos $f(n) << g(n)$ o bien O(f(n)) < O(g(n)).

En el ejemplo anterior hemos visto que $f(n) \approx g(n) \approx n^5$. En general si f es un polinomio de grado p, $f(n) = an^p + \cdots (a \neq 0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^p} = a > 0 \Rightarrow f(n) \approx n^P$

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Ejemplo de comparación entre el polinomio de Taylor y la función original:**

Dada la función $f(x) = xsinx$, calcula:

a) El polinomio de Taylor de grado 2, $P_2(x)$, para la función $f(x) = xsinx$ en el punto x=0. Haz los gráficos de f(x) y de $P_2(x)$ en [-10,10]. ¿Qué observas?.

b) El polinomio de Taylor de grado 4, $P_4(x)$, para la función $f(x) = xsinx$ en el punto x=0. Haz los gráficos de f(x) y de $P_4(x)$ en [-10,10]. ¿Qué observas?.

c) El polinomio de Taylor de grado 10, $P_{10}(x)$, para la función $f(x) = xsinx$ en el punto x=0. Haz los gráficos de f(x) y de $P_{10}(x)$ en [-10,10] y en [-4,4]. ¿Qué observas?.

d) Dibuja, en un mismo gráfico, f(x), $P_2(x)$, $P_4(x)$, $P_6(x)$ y $P_{10}(x)$ en [-10,10]. Haz una tabla de valores con f(x), $P_2(x)$, $P_4(x)$,$P_6(x)$ y $P_{10}(x)$ para x:=-2,-1.7..2. Saca conclusiones.

a) La expresión del polinomio de Taylor de grado 2 para f(x) en el punto x=0 viene dado por $P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$. Así si calculamos la primera derivada y la segunda en el punto x=0, así como $f(0)$ obtenemos:

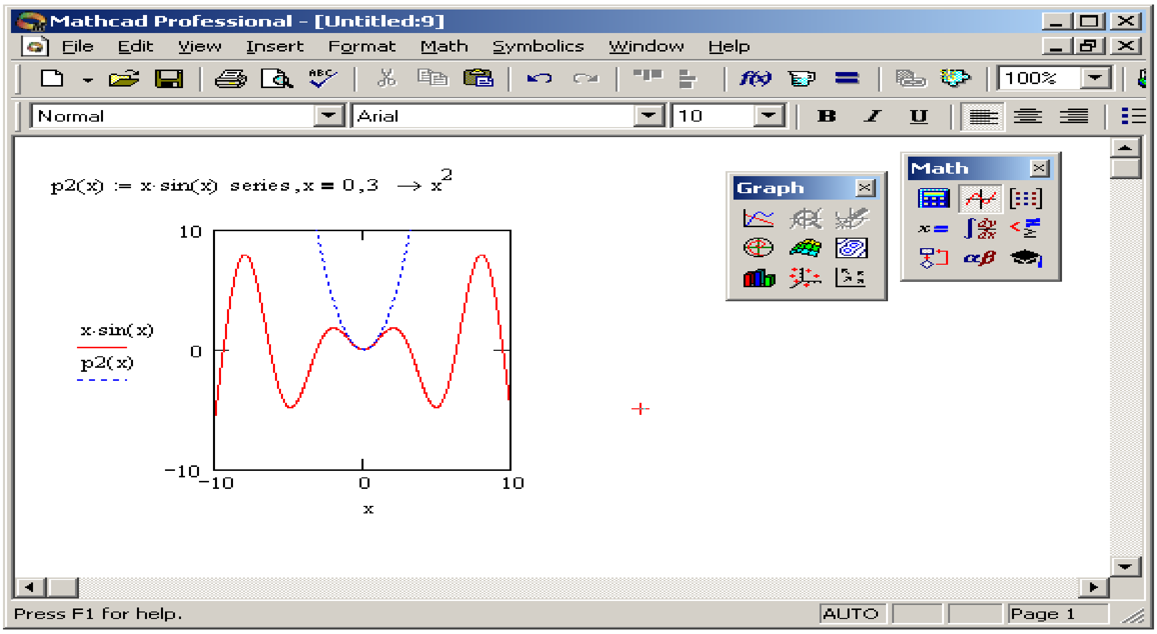
$$f(x) = xsinx \Rightarrow f(0) = 0sin0 = 0$$
$$f'(x) = sinx + x\cos x \Rightarrow f'(0) = sin0 + 0\cos 0 = 0$$
$$f''(x) = \cos x + \cos x + x(-sinx) \Rightarrow f''(0) = \cos 0 + \cos 0 + 0(-sin0) = 2$$

Substituyendo, $P_2(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{2}{2!}(x-0)^2 = x^2$

Veamos como Mathcad nos permite comprobar desarrollos de Taylor de funciones. En este caso:

Introducimos la función y luego llamamos la función interna de Mathcad "series" acompañada de la variable igual al punto alrededor del cual deseamos desarrollar. Finalmente introducimos el grado más la unidad.	$x \cdot \sin(x) \text{ series}, x = 0, 3 \rightarrow x^2$

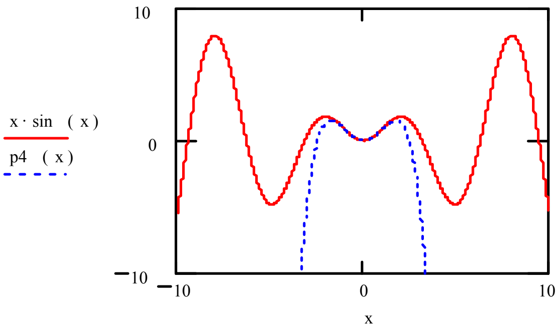
Podemos ilustrar este cálculo del polinomio de Taylor con las gráficas de la función original y de dicha aproximación:



Vemos claramente como, en un entorno alrededor de 0, el polinomio aproxima muy bien el comportamiento de la función.

b)

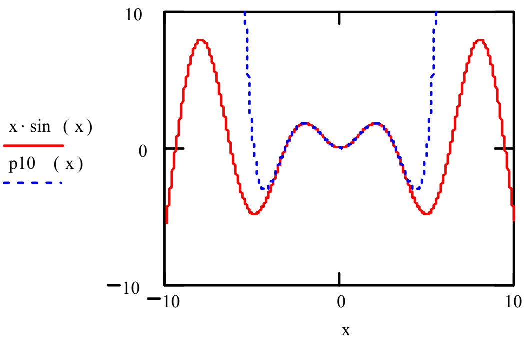
$$p4(x) := x \cdot \sin(x) \text{ series}, x = 0, 5 \rightarrow x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^4$$

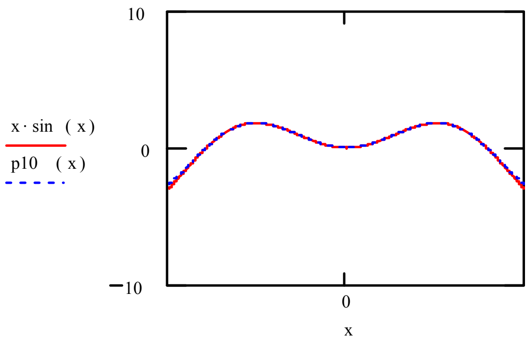


Ahora vemos como, en un entorno de 0 mayor que en el anterior apartado, el polinomio aproxima mejor el comportamiento de la función.

c)

$$p10(x) := x \cdot \sin(x) \text{ series}, x = 0, 11 \rightarrow x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^6 - \frac{1}{5040} \cdot x^8 + \frac{1}{362880} \cdot x^{10}$$

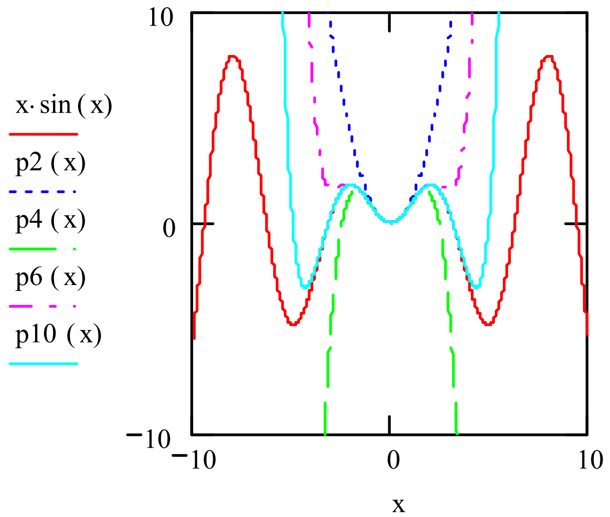




Ahora el contacto entre el polinomio y la función es mayor, si se toman valores dentro del intervalo [-4,4] cometeremos errores insignificantes al escribir: f(x) = xsin(x)= P_{10}(x). De hecho son indistinguibles los dos gráficos en [-4,4].

d)

$$p6(x) := x\cdot\sin(x) \text{ series }, x = 0, 7 \rightarrow x^2 - \frac{1}{6}\cdot x^4 + \frac{1}{120}\cdot x^6$$



$x := -2, -1.7 .. 2$

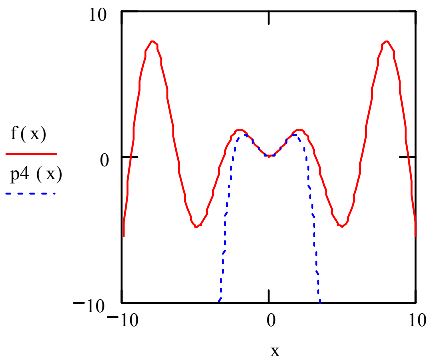
x =	x·sin(x) =	p2(x) =	p4(x) =	p6(x) =	p10(x) =
-2	1.819	4	1.333	1.867	1.819
-1.7	1.686	2.89	1.498	1.699	1.686
-1.4	1.38	1.96	1.32	1.382	1.38
-1.1	0.98	1.21	0.966	0.981	0.98
-0.8	0.574	0.64	0.572	0.574	0.574
-0.5	0.24	0.25	0.24	0.24	0.24
-0.2	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.1	$9.983\cdot10^{-3}$	0.01	$9.983\cdot10^{-3}$	$9.983\cdot10^{-3}$	$9.983\cdot10^{-3}$
0.4	0.156	0.16	0.156	0.156	0.156
0.7	0.451	0.49	0.45	0.451	0.451
1	0.841	1	0.833	0.842	0.841
1.3	1.253	1.69	1.214	1.254	1.253
1.6	1.599	2.56	1.468	1.608	1.599
1.9	1.798	3.61	1.438	1.83	1.798

En esta comparativa final, con tabla de valores incluida, se ve, numéricamente, las aproximaciones de los polinomios de Taylor. Los intervalos de aproximación aumentan a medida que aumenta el grado del polinomio.

Ejemplo de Output Mathcad:

Explica, detalladamente y paso por paso, lo que hace el programa Mathcad en la siguiente pantalla.

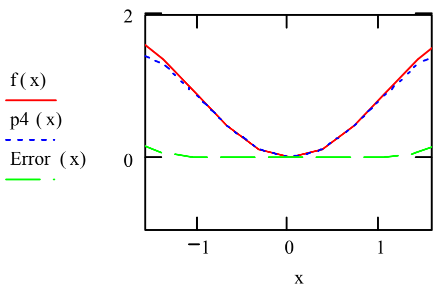
1) $f(x) := x \cdot \sin(x)$ $\quad p4(x) := x \cdot \sin(x)$ series $, x = 0, 5 \rightarrow x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^4$ $\quad x := -10, -9.9 .. 10$



2) $x := -\pi, \frac{-8\pi}{9} .. \pi$ $\quad \text{Error}(x) := f(x) - p4(x)$

x =	f(x) =	p4 (x) =	Error (x) =
-3.142	0	-6.365	6.365
-2.793	0.955	-2.337	3.292
-2.443	1.571	0.029	1.541
-2.094	1.814	1.18	0.634
-1.745	1.719	1.5	0.219
-1.396	1.375	1.316	0.059
-1.047	0.907	0.896	0.011
-0.698	0.449	0.448	$9.537 \cdot 10^{-4}$
-0.349	0.119	0.119	$1.503 \cdot 10^{-5}$
0	0	0	0
0.349	0.119	0.119	$1.503 \cdot 10^{-5}$
0.698	0.449	0.448	$9.537 \cdot 10^{-4}$
1.047	0.907	0.896	0.011
1.396	1.375	1.316	0.059
1.745	1.719	1.5	0.219
2.094	1.814	1.18	0.634

3) $x := \frac{-\pi}{2}, \frac{-2\pi}{5} .. \frac{\pi}{2}$



Veamos como Mathcad nos permite hacer desarrollos de Taylor de funciones:

Introducimos la función y luego llamamos la función interna de Mathcad "series" acompañada de la variable igual al punto alrededor del cual deseamos desarrollar, el cero. Finalmente introducimos el grado más la unidad. En este caso el polinomio es de grado 4.

Podemos ilustrar este cálculo del polinomio de Taylor con las gráficas de la función original y de dicha aproximación en el intervalo [-10,10] el paso de la x es de 1 décima.

Comparativa con tabla de valores en el intervalo [-π,π], el paso es de π/9 . Se ve, numéricamente, la aproximación del polinomio de Taylor. Vemos, claramente, como, en un entorno alrededor de 0, el polinomio aproxima muy bien el comportamiento de la función, el error es prácticamente nulo. A medida que nos alejamos del cero la aproximación es peor y el error es mayor.

En esta comparativa final las gráficas se han hecho en el intervalo [-π/2,π/2], el paso es de π/10. Vemos que coinciden y el error es despreciable.

- **Ejemplo de cálculo de un desarrollo (o serie) de Taylor:**

Desarrollad la función $y=\cos^2 x$ alrededor de $x=\pi/4$ hasta el tercer grado. Utilizar el desarrollo para calcular un valor aproximado del $\cos^2(1{,}1\pi/4)$. ¿Podéis dar una cota superior al error entre la aproximación obtenida en el desarrollo de Taylor y el valor exacto? Comprobad la serie de Taylor, la aproximación y el error cometido con Mathcad.

El polinomio de Taylor de tercer grado que aproxima la función $\cos^2 x$ alrededor de $x=\pi/4$ viene dado por:

$$P_{3,\frac{\pi}{4}}(x)=\cos^2\frac{\pi}{4}+\frac{\left.\frac{d(\cos^2 x)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}}{1!}(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\left.\frac{d^2(\cos^2 x)}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{\left.\frac{d^3(\cos^2 x)}{dx^3}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3$$

Si substituimos en la expresión anterior los siguientes resultados:

$$\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{d(\cos^2 x)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=2\cos x(-\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=-2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=-1$$

$$\left.\frac{d^2(\cos^2 x)}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{d(-2\sin x\cos x)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=-2(\cos^2 x-\sin^2 x)\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\left.\frac{d^3(\cos^2 x)}{dx^3}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{d\left(2(\sin^2 x-\cos^2 x)\right)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=8\sin x\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=8\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

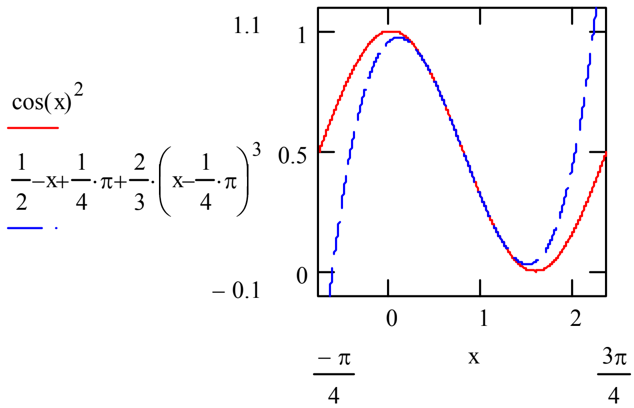
llegamos a:

$$P_{3,\frac{\pi}{4}}(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{4})+\frac{0}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{4}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3=\frac{1}{2}-(x-\frac{\pi}{4})+\frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3$$

Veamos como Mathcad nos permite comprobar desarrollos de Taylor de funciones. En este caso:

Introducimos la función y luego llamamos la función interna de Mathcad "series" acompañada de la variable igual al punto alrededor del cual deseamos desarrollar. Finalmente introducimos el grado más la unidad.	$(\cos(x))^2 \text{ series}, x = \frac{\pi}{4}, 4 \rightarrow \frac{1}{2} - x + \frac{1}{4}\cdot\pi + \frac{2}{3}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\cdot\pi\right)^3$

Podemos ilustrar este cálculo del polinomio de Taylor con las gráficas de la función original y de dicha aproximación:



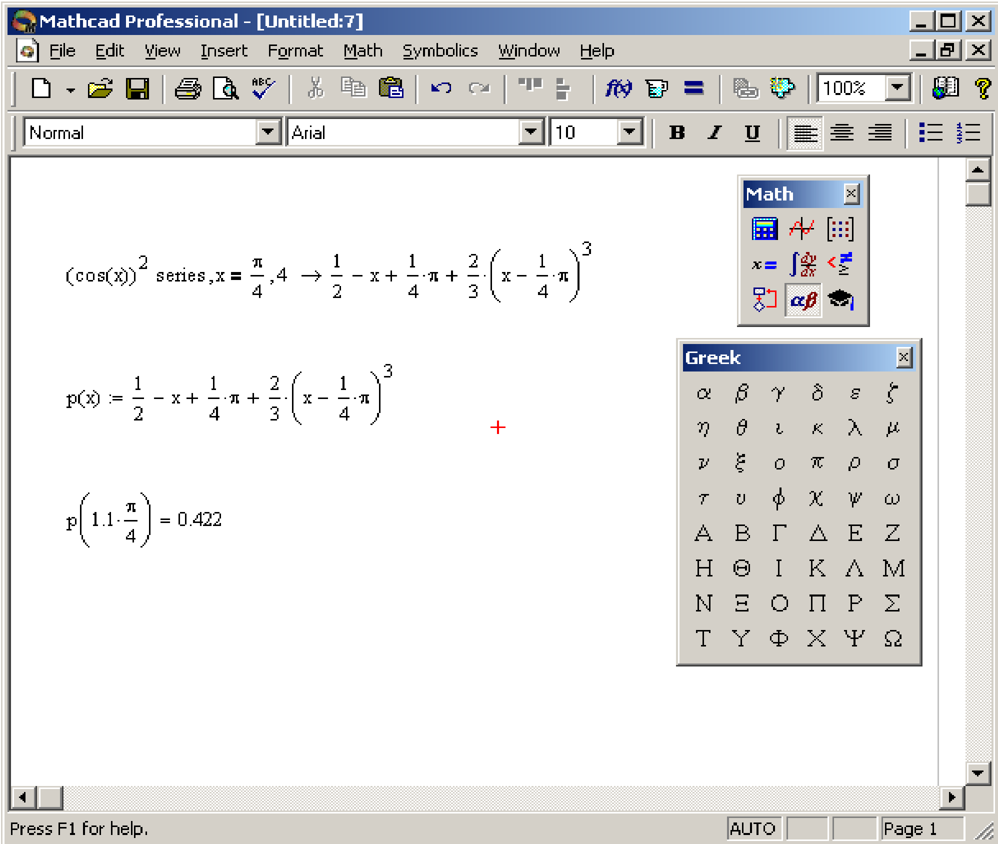
Vemos claramente como en un entorno alrededor de $\pi/4 \approx 0{,}785$, el polinomio aproxima muy bien el comportamiento de la función.

Calculamos la aproximación a $\cos^2\left(1{,}1\frac{\pi}{4}\right)$ evaluando el valor numérico del polinomio de Taylor de tercer grado para $x = 1{,}1\frac{\pi}{4}$:

$$P_{3,\frac{\pi}{4}}(1{,}1\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}-\left(0{,}1\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(0{,}1\frac{\pi}{4}\right)^3=0.421783165$$

Sin necesidad de evaluar funciones trigonométricas —sólo con poder multiplicar y sumar—, obtenemos una aproximación de la función $\cos^2(x)$ alrededor de $x = 1{,}1\frac{\pi}{4}$. Aquí radica la gran utilidad de los desarrollos de Taylor.

Comprobamos dicho resultado fácilmente con Mathcad. Mediante la técnica del "copiar y pegar" construimos la función *p(x)*. Para luego evaluarla en $x = 1{,}1\frac{\pi}{4}$.



La estimación del error cometido se obtiene a partir del cálculo del Residuo de Lagrange del polinomio de Taylor para la función $\cos^2(x)$ alrededor del punto $x = \frac{\pi}{4}$:

$$R_{n,\frac{\pi}{4}}(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{4})^{n+1}}{(n+1)!} \left.\frac{d^{n+1}(\cos^2 x)}{dx^{n+1}}\right|_{x=\xi}$$

donde *n* es tal que 1/ es mayor que el grado del polinomio de Taylor y 2/ hace que $R_{n,\frac{\pi}{4}}(x)$ sea diferente de cero debido a una derivada *n*-ésima idénticamente nula. Esta expresión nos proporciona la diferencia entre el valor exacto de la función y del polinomio que la aproxima. Como

$$R_{3,\frac{\pi}{4}}(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{4})^{4}}{4!} \left.\frac{d^{4}(\cos^2 x)}{dx^{4}}\right|_{x=\xi} = 0$$

ya que:

$$\left.\frac{d^4(\cos^2 x)}{dx^4}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{d(8\sin x\cos x)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$$

tenemos que calcular $R_{4,\frac{\pi}{4}}(1{,}1\cdot\frac{\pi}{4},\xi)$

Utilizando $\left.\dfrac{d^5(\cos^2 x)}{dx^5}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \left.\dfrac{d\big(8(\cos^2 x - \sin^2 x)\big)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = -32\sin x\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -16$

obtenemos para el Residuo de Lagrange:

$$R_{4,\frac{\pi}{4}}(x,\xi) = \frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{5!}\left.\frac{d^5(\cos^2 x)}{dx^5}\right|_{x=\xi} = \frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{120}\cdot(-32)\sin x\cos x\Big|_{x=\xi}$$

es decir:

$$R_{4,\frac{\pi}{4}}(1{,}1\cdot\frac{\pi}{4},\xi) = \frac{-4(0{,}1\frac{\pi}{4})^5}{15}\sin\xi\cos\xi = -\frac{10^{-5}\pi^5}{30\cdot 4^4}\sin 2\xi$$

ξ es un real de valor desconocido pero necesariamente localizado dentro del intervalo $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\cdot 1{,}1\right)$. Esto nos permite, pues, acotar el error superiormente a partir del valor máximo de $R_{n,\frac{\pi}{4}}(1{,}1\cdot\frac{\pi}{4},\xi)$ con $\xi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\cdot 1{,}1\right)$.Acotamos el error entre el valor exacto de la función y la estimación derivada del polinomio de Taylor utilizando el valor máximo del valor absoluto del Residuo de Lagrange. Dicho valor máximo se obtiene para $\xi=\pi/4$:

$$\varepsilon = \left|R_{4,\frac{\pi}{4}}(1'1\cdot\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\right| = \frac{10^{-5}\pi^5}{30\cdot 4^4}\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{10^{-5}\pi^5}{30\cdot 4^4} \approx 3{,}984631\cdot 10^{-7}$$

Esto nos permite escribir que:

$$\cos^2\left(1{,}1\frac{\pi}{4}\right) = 0.4217831 \pm 0.0000004$$

y comparar con el resultado exacto que podemos obtener, por ejemplo, con Mathcad:

$$\cos^2\left(1{,}1\frac{\pi}{4}\right) = 0.42178276748$$

Este último se encuentra dentro del intervalo definido por las barras de error para el valor aproximado.

- **Ejemplo de aplicación del cálculo diferencial al computo de límites:**

Calculad los siguientes límites utilizando la regla de l'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q}$ con p y q >0

El límite en *a)* tiende a $\frac{0}{0}$ cuando $x \to 0$ y, por lo tanto, podemos aplicar la regla de l'Hôpital. Derivando el numerador y el denominador obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\alpha x}-e^{\beta x})'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}}{1}=\alpha-\beta$$

Notad que no calculamos los límites laterales por separado puesto que coinciden como podéis comprobar.

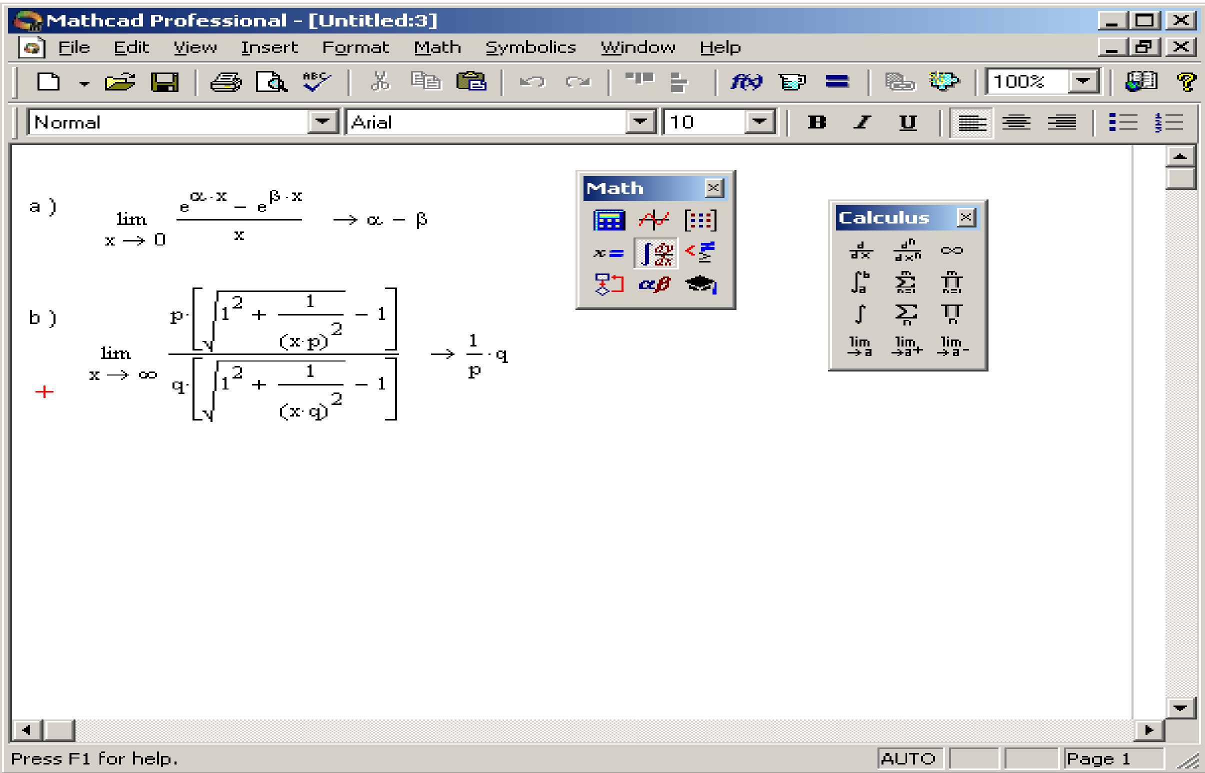
En el caso *b)* también podemos aplicar la regla de l'Hôpital puesto que el límite tiende a $\frac{0}{0}$ cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}=$$

que simplificando nos conduce a:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}}=\frac{q}{p}$$

Comprobamos ambos resultados con Mathcad:



Ejemplos de comparación de algoritmos:

El concepto “eficiencia de un algoritmo” hemos visto que hace referencia al número estimado de operaciones (tanto aritméticas como lógicas) que realizará éste antes de proporcionar un resultado.

Veamos dos ejemplos:

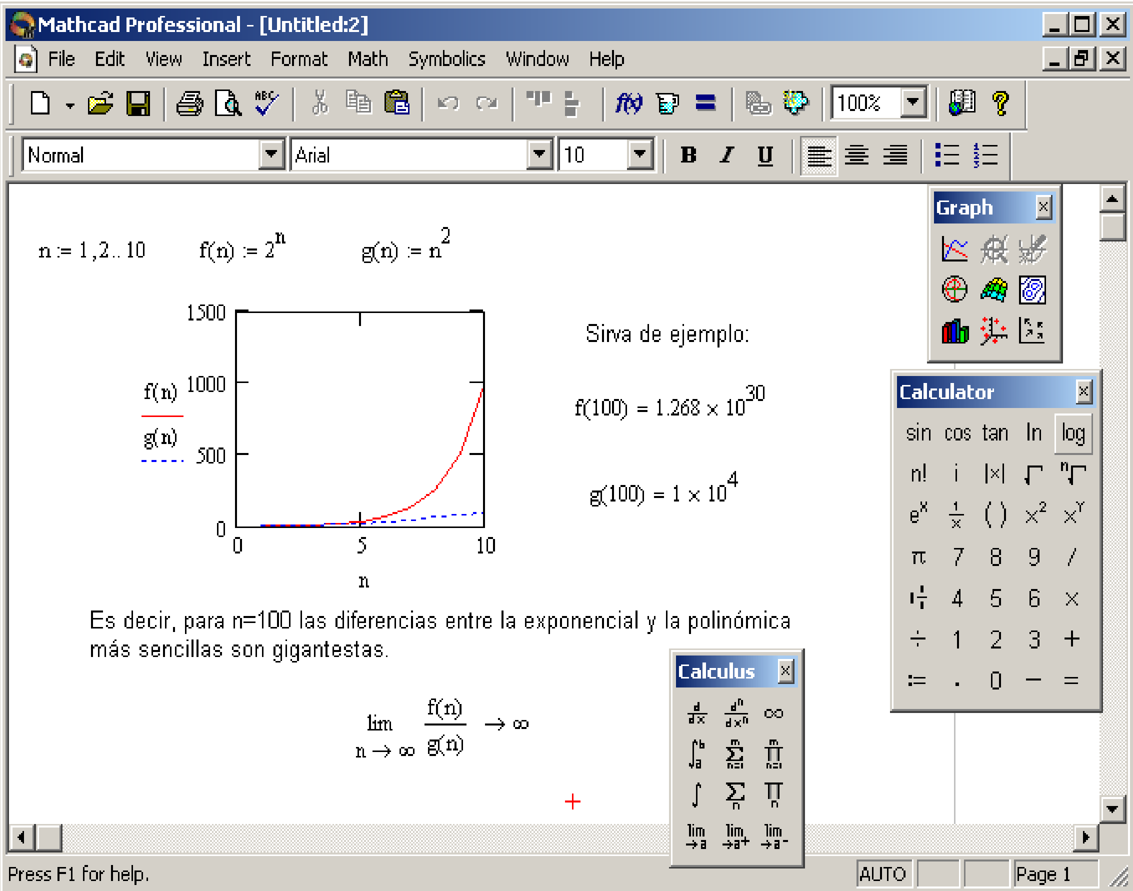
1.- En Programación Lineal se utiliza el software lindo que está basado en el algoritmo del simplex cuyo orden es polinómico, *O(n*^{p}*)*. Hay otro algoritmo, pero que no se utiliza, que es el de Karmarkar. La razón por la que no se utiliza es porque es de orden exponencial O(a^n), a>1. Veamos el por què:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^p}=\frac{\infty}{\infty}=in\det=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=(Hôpital-p-veces)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)^p a^x}{p\cdot(p-1)\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{(\ln a)^p}{p!}\bullet\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$$

Luego una exponencial de base mayor que 1 crece con mucha más rapidez que cualquier polinómica $a^n >>> n^p$, con lo que es mejor el algoritmo de orden polinómico.

Veamos un ejemplo con el Mathcad para a =2 y p=2.



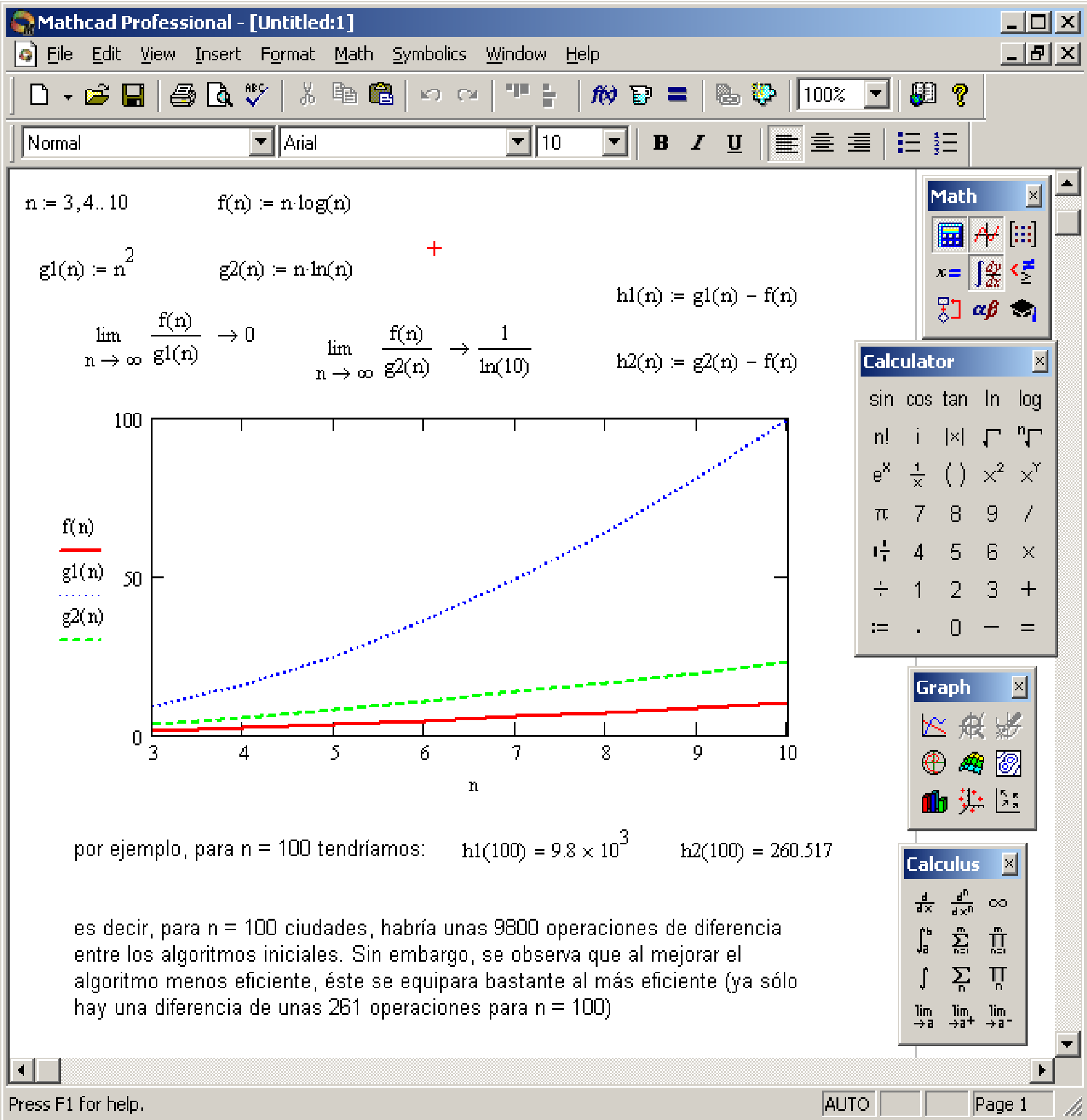
Decir que el algoritmo del simplex hay veces que se cicla y no llega a la solución. La práctica nos ha demostrado que hay un porcentaje de problemas, alrededor de un 90%, que el lindo ha podido solucionar. Sin embargo, con el algoritmo de Karmarkar pasa al revés, sólo llega a la solución un 10%, “las demás veces se cuelga”.

2.- Supongamos que, dado un conjunto de *n* ciudades (*n* ≥ 3) y la correspondiente matriz de distancias entre ellas *D* = (d_{ij}), disponemos de dos algoritmos distintos, que tienen una complejidad de orden *n·log(n)* y n^2 respectivamente, capaces de hallar la trayectoria de mínima distancia que las recorra todas. Nuestro objetivo será determinar cuál de los dos algoritmos es más eficiente, el mejor, i.e.: para un número dado (muy elevado) de ciudades, cuál de los dos requiere de un tiempo de computación menor para llegar a la solución. El número de operaciones a realizar depende del número de ciudades (o nodos) *n* implicadas. Para determinar cuál de los dos es más eficiente (para valores muy grandes del parámetro *n*), recurriremos al concepto de límite en el infinito.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot\log n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 10/x}{1}=\frac{1}{\ln 10}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Esto significa que, para valores grandes de *n* (nº de nodos o ciudades), *n·log(n)* << n^2, con lo que el algoritmo de orden *n·log(n)* es mucho más eficiente (requiere de muchas menos operaciones para llegar a la solución).

Podemos recurrir a Mathcad para que nos ayude en el cálculo del límite anterior, en la representación gráfica de las funciones, y en análisis del tipo ¿qué pasaría si ahora logramos rediseñar el algoritmo menos eficiente de forma que su orden de complejidad sea de *n·ln(n)*?



BIBLIOGRAFÍA

[1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.

[2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.

[3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): “Temes clau de càlcul”. Barcelona: UPC.

[4] Courant, R.; John, F. (1971): “Introducción al cálculo y al análisis matemático”. México: Limusa.

[5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): “La Informática Aplicada a la Enseñanza”. Eudema S.A. Madrid.P 37.

[6] Ortega J. (1990): “Introducció a l’anàlisi matemática”. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

[7] Tang, S. (1986): “Applied Calculus”. PWS Publishers.

[8] Burbulla, D.(1993): “Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple”. Prentice Hall.

[9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

ENLACES

[W1] http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfTaylorsTheorem.html

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre el Teorema de Taylor. También se pueden buscar en http://planetmath.org/encyclopedia otros conceptos como Regla de L'Hôpital, por ejemplo. Está en inglés.

[W2] http://www.satd.uma.es/aciego/docencia/Calculo_I/SeriesFun-Tr.pdf

Página web con apuntes sobre las derivadas, el Teorema de Taylor y la Regla de L'Hôpital.

[W3] http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo.htm

Página web donde aparecen apuntes de cálculo de un psicólogo, en la cual ha seleccionado las citas más relevantes de los textos con los que pudo trabajar. Todas las citas tienen el siguiente formato: [texto (autor, página)].

[W4] http://www.xtec.es/~jlagares/manualwinfun.cat/estractemanualfuncionsperawindows.htm

Página web sobre un articulo, que ganó el segundo premio en el "*concurso de programas educativos para ordenador*" organizado por el M.E.C. el año 1993. Trata sobre un programa, **"funciones para windows"**, con ejemplos gráficos. En particular, habla de la aproximación de una función por medio del polinomio de Taylor. En catalán.

[W5] http://www.satd.uma.es/matap/svera/calitis/rprob0001/rp2iti0001.html

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas y apuntes sobre las derivadas y sus aplicaciones.

[W6] http://neko.ciencias.uniovi.es/~jlfm/apder.pdf

Otra web, esta vez del profesor del Departamento de matemáticas de la universidad de Oviedo, con problemas y apuntes sobre las derivadas y sus aplicaciones.

[W7] http://www.okmath.com/Bloque.asp?clave=121
Página web que contiene problemas resueltos, con 3 niveles de dificultad, sobre la regla de l'Hôpital.

[W8] http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap_08/cap8_8-5.html

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. Hay teoría y ejercicios sobre la regla de l'Hôpital.

[W9] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/grupo13m/

Página web del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad politécnica de Madrid. Contiene ejercicios y exámenes sobre aplicaciones de las derivadas.

[W10] http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.