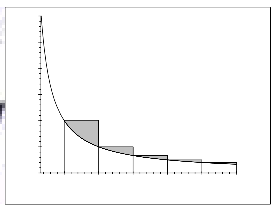
Sucesiones y series

Josep Bernat Pané

P01/75005/00104



UOC
La universidad virtual

Índice

Introducción

En los módulos anteriores nos hemos concentrado en las herramientas que permiten estudiar comportamientos continuos. Por ejemplo, la distancia que recorre un coche se puede expresar en función del tiempo, que en principio fluye de manera continua. Sin embargo, existen otros fenómenos que no fluyen de forma continua, sino que necesitan un determinado tiempo para producirse. Por ejemplo, el crecimiento de una población no se produce de manera continua, sino a intervalos regulares, y los pagos a un banco tampoco, puesto que sólo se realizan una vez al mes.

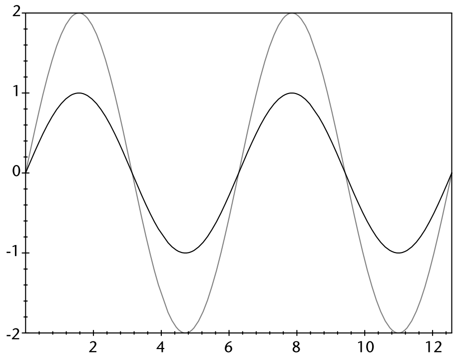
Las herramientas que hemos visto hasta ahora nos permiten, por ejemplo, calcular el peso de un cubo de arista x y de densidad constante k y estudiar lo que sucede cuando hacemos que la arista tienda a 0.

Para resolver este problema sólo hay que tener en cuenta que el peso viene determinado por el volumen del cubo multiplicado por la densidad del material, $P = kx^3$. Esta relación nos indica que cuando x tiende a 0, el peso del cubo tiende a 0 de manera continua.

Sin embargo, detengámonos a pensar un poco. Supongamos que inicialmente no tenemos material; si añadimos una molécula, entonces el peso aumentará una cantidad p_1. Este fenómeno no es continuo, y no hay manera de que lo sea: o bien tenemos la molécula y el peso es p_1, o bien no tenemos la molécula y el peso es 0.

Muchos de los modelos que utilizamos para explicar la realidad se basan en la idea de que podemos fraccionar la cantidad que estudiamos tantas veces como se quiera, sin que el comportamiento de esta cantidad varíe. Las técnicas matemáticas de funciones continuas y funciones derivables nos permiten estudiar estos tipos de modelos. En este módulo introduciremos las técnicas matemáticas para estudiar fenómenos que se producen a intervalos regulares de tiempo, en los que el concepto de continuidad no tiene sentido.

El estudio del crecimiento de una población que se reproduce cada tres meses es un ejemplo de lo que hemos comentado:



La gráfica nos sugiere que estudiemos el crecimiento cada tres meses. Tal y como se ve, no tenemos continuidad.

Objetivos

Los objetivos que podréis alcanzar al final de este módulo didáctico son los siguientes:

1. Definir el concepto de sucesión.

2. Comprobar si una sucesión verifica las propiedades de acotación y de monotonía.

3. Definir el concepto de límite de una sucesión.

4. Conocer las propiedades fundamentales del límite de una sucesión.

5. Distinguir los casos de indeterminaciones en el cálculo de límites y resolver los casos concretos, utilizando los criterios adecuados.

6. Comprender el concepto de sucesiones equivalentes y utilizarlas para el cálculo de límites.

7. Definir el concepto de serie.

8. Describir y aplicar los criterios de convergencia de las series de términos positivos.

9. Reconocer las series alternadas.

10. Estudiar la convergencia de una serie alternada mediante el criterio de Leibniz.

11. Calcular el error entre el valor de la suma de la serie y la suma de un número finito de términos.

12. Comprender el concepto de serie de potencias y calcular su radio de convergencia.

13. Calcular la suma de una serie.

1. Sucesiones de números reales

1.1. Concepto general de sucesión

Una sucesión es el nombre matemático que hace referencia a una lista infinita de números. En una lista podemos hablar de primer término, segundo término, etc., que corresponden a la posición que ocupan en dicha sucesión.

Podemos formalizar todo esto un poco más: podemos asociar cada número entero positivo n con un número real x_n, y el conjunto ordenado:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$$

define una sucesión infinita. Observad que cada término de la sucesión tiene asignado un número entero positivo (el puesto que ocupa en la lista) y podemos hablar del **primer término** (x_1), del **segundo término** (x_2) y, en general, del **término *n*-ésimo** (x_n). Cada término (x_n) tiene un término siguiente (x_{n+1}), por lo que, en consecuencia, no hay último término.

La forma más fácil para construir una sucesión es a partir de una regla o fórmula que defina el término n-ésimo. Así, por ejemplo, la fórmula $x_n = \frac{1}{n}$ define la sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$$

En algunas ocasiones son necesarias dos o más fórmulas para describir los elementos de la lista. Por ejemplo, si consideramos la sucesión $x_{2n-1} = 1$ y $x_{2n} = n$; en este caso, los primeros términos de la sucesión son:

$$1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots, 1, n \ldots$$

Otra forma de definir una sucesión es mediante una **fórmula de recurrencia**, que permite calcular un término a partir de los anteriores. Si tomamos $x_1 = x_2 = 1$ y la fórmula de recurrencia, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, tendremos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots$$

Esta sucesión se conoce como **sucesión de Fibonacci**, nombre que recibe de la persona que la estudió al tratar un problema relativo a los procesos hereditarios en los conejos.

Hasta ahora, todas las sucesiones que hemos visto han empezado con los valores de $n = 1, 2, 3 \ldots$, aunque esto no sea estrictamente necesario. Por ejemplo, si definimos la sucesión mediante el término general, $x_n = 1+\frac{1}{n-2}$ es razonable considerar que n toma los valores $3, 4, 5 \ldots$

Así pues, podemos definir de manera formal el concepto de sucesión como vemos a continuación:

Una **sucesión de números reales** es una aplicación *h* de los números naturales $\mathbb{N}$ en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto h(n) = x_n \end{aligned}$$

La imagen de n recibe el nombre de **término *n*-ésimo** o **término general** de la sucesión.

No olvidéis que lo único que hemos hecho es reciclar el concepto de función continua, donde hemos fijado el dominio de la función como el conjunto $\mathbb{N}$.

Ejercicio 1.1.

Calculad el término general de las siguientes sucesiones:

a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$

b) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \ldots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \ldots$

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7} \ldots$

e) $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}, \frac{8}{6}, \frac{10}{7}, \frac{12}{8}, \frac{14}{9} \ldots$

f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5\,040} \ldots$

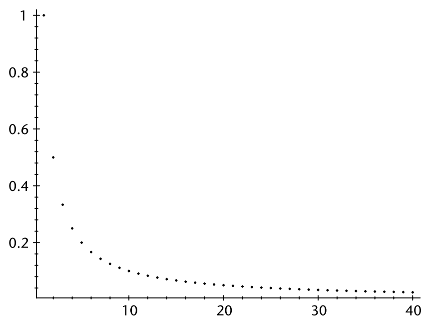
Una vez ha quedado definido el concepto de sucesión, vamos a presentar algunas de sus propiedades. Sin embargo, antes analizaremos qué quiere decir que dos sucesiones son iguales.

> Dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son **iguales** si $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

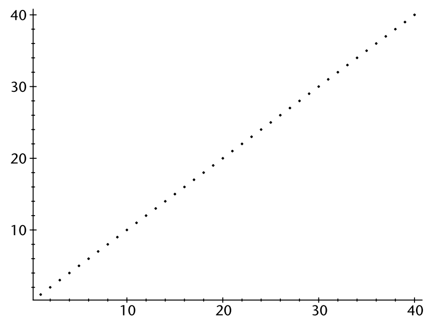
A partir de la definición tenemos que las sucesiones $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n} \cdots\}$ y $\{y_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n+1} \cdots\}$ son diferentes a pesar de que $y_n = x_{n+1}$. O también que $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n} \cdots\}$ y $\{y_n\} = \{1, 3, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n} \cdots\}$ son distintas al diferir en el segundo término.

1.2. Sucesiones acotadas

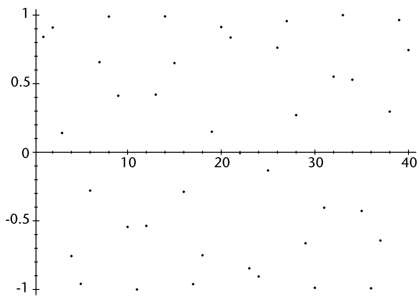
Consideramos las sucesiones de término general $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$ y $z_n = \sin n$ y las representamos gráficamente:



$x_n = \frac{1}{n}$



$y_n = n$



$z_n = \sin n$

A partir de los gráficos podemos observar cómo la sucesión y_n crece de forma indefinida, mientras que los valores x_n y z_n nunca están por encima de 1. Así, x_n y z_n son sucesiones acotadas; por el contrario, y_n es no acotada.

Una sucesión está acotada si existe un número K tal que los valores que toma la sucesión nunca superan el valor K.

Una sucesión $\{x_n\}$ es **acotada** si existe un número real K tal que:

$$|x_n| \leq K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, K es una cota de la sucesión $\{x_n\}$.

Ejemplo 1.1.

A partir de la definición demostraremos que $x_n = \frac{1}{n}$ es acotada.

Puesto que $n \geq 1$, podemos decir que $1 \geq \dfrac{1}{n}$. Por tanto, la sucesión es acotada.

Los hechos que se presentan a continuación son una consecuencia de la definición de sucesión acotada que hemos visto:

1) Para demostrar que una sucesión está acotada, tenemos que comprobar que ningún valor de x_n supera un determinado valor K.

2) La definición no aporta un procedimiento que nos permita calcular el número K. Observaremos que no hay un lugar donde se diga que esta cota sea única.

3) Veamos cómo se puede demostrar que una sucesión no está acotada a partir de un caso concreto: ¿qué quiere decir que $\{x_n\} = n$ es no acotada?

Para ilustrar este concepto sólo necesitaremos presentar una cota K, que sea, por ejemplo, 10. Para ver que la sucesión no está acotada, es necesario encontrar un valor de n tal que $x_n > 10$. Por ejemplo, podemos tomar $n = 11$ teniendo en cuenta que $x_{11} = 11 > 10$. Si, en lugar de $K = 10$, tomamos $K = 100$, entonces tenemos que encontrar el valor de n tal que $x_n > 100$. En este caso, $n = 101$, porque $x_{101} = 101$.

Podríamos dar un valor de K tan grande como se quiera y encontraríamos un valor de n tal que $x_n > K$. Así, x_n es no acotada.

Una sucesión es **no acotada** si para cualquier valor de K, arbitrariamente grande, existe un n natural tal que $|x_n| > K$.

4) Recordemos que ∞ no es un número real. Este hecho implica que una sucesión con un número finito de términos está siempre acotada.

Ejemplo 1.2.

Demostremos que $x_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ es no acotada.

Tenemos que probar que dado un valor K arbitrariamente grande, entonces existe un valor de n tal que $|x_n| \geq K$.

Sin embargo, $x_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, que podemos escribir como $x_n = n + \dfrac{1}{n} > K$. Puesto que n puede hacerse arbitrariamente grande, es imposible encontrar un valor K tal que $x_n < K$ para todo valor de n.

Si queremos determinar el valor de n tal que $x_n > K$, entonces $n > K$.

Ejercicios

1.2. Probad que $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ es acotada.

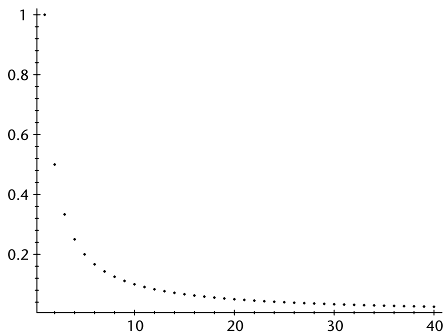
1.3. Probad que $x_n = n^2$ es no acotada.

1.4. Estudiad si la sucesión $1, \frac{1}{2}, 2, 1, \frac{1}{3}, 3, 1, \frac{1}{4}, 4, 1, \frac{1}{5}, 5 \ldots$ es acotada.

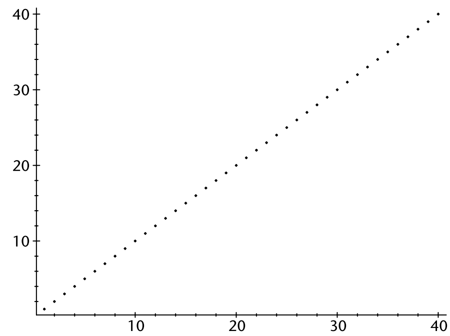
1.5. Considerad la sucesión establecida por la relación $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}$ con $x_1 = 1$. Estudiad si esta sucesión es acotada.

1.3. Sucesiones monótonas

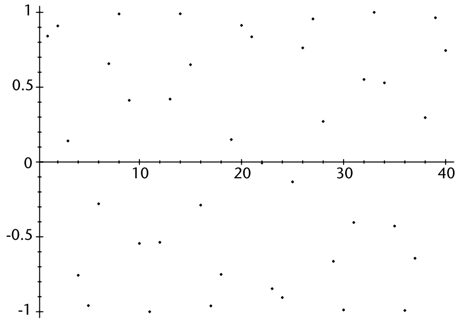
Volvemos a las sucesiones del tema anterior, y consideramos las sucesiones de término general $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$ y $z_n = \sin n$.



$x_n = \frac{1}{n}$



$y_n = n$



$z_n = \sin n$

Tal y como se observa en los gráficos, la sucesión x_n decrece de manera indefinida, y_n crece indefinidamente y z_n ni crece ni decrece.

- Una sucesión $\{x_n\}$ és **creixent** es **creciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n \leq x_{n+1}$.
- Una sucesión $\{x_n\}$ es **estrictamente creciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n < x_{n+1}$.
- Una sucesión $\{x_n\}$ es **decreciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n \geq x_{n+1}$.
- Una sucesión $\{x_n\}$ es **estrictamente decreciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n > x_{n+1}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ es monótona si es creciente o decreciente.

Ejemplo 1.3.

Nos proponemos demostrar que la sucesión con término general $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ es monótona creciente.

Si queremos comprobar que la sucesión es monótona creciente, tenemos que demostrar que $x_n \leq x_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcl}
x_n & \overset{?}{\leq} & x_{n+1} \\
\dfrac{n}{n+1} & \overset{?}{\leq} & \dfrac{n+1}{(n+1)+1} \\
\dfrac{n}{n+1} & \overset{?}{\leq} & \dfrac{n+1}{n+2} \\
n(n+2) & \overset{?}{\leq} & (n+1)\cdot(n+1) \\
n^2+2n & \overset{?}{\leq} & n^2+2n+1 \\
0 & \leq & 1
\end{array}$$

Teniendo en cuenta que todas las desigualdades anteriores son equivalentes y la última es cierta, entonces tenemos que todas las desigualdades son ciertas. Así, la sucesión es monótona creciente.

Notación

El símbolo $\overset{?}{\leq}$ quiere decir que no sabemos si la desigualdad es cierta o no.

Ejercicios

1.6. Demostrad que la sucesión de término general $x_n = \sqrt{n}$ es creciente.

1.7. Estudiad si la sucesión $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ es creciente.

1.8. Probad que la sucesión de término general $x_n = n + (n+1) + \cdots + 2n$ es creciente.

1.9. Estableced para qué valores de x la sucesión $x_n = x^n$ es monótona.

Hemos resuelto el problema del ejemplo 1.3 con un método estándar, pero lo hubiésemos podido resolver de otra manera: hemos definido las sucesiones como una aplicación de un subconjunto de los números naturales a los reales. Sólo tenemos que ver si la aplicación tiene sentido cuando cambiamos n por x, pensando que está definida en un subconjunto de los números reales y que toma valores en los reales. De esta forma, podríamos aplicar las teorías del cálculo diferencial y, en particular, el hecho de que una función es creciente si su derivada es positiva.

El estudio de las propiedades de $x_n = h(n)$ a partir de las propiedades de $h(x)$ sólo se puede llevar a cabo si:

1) Tenemos la expresión explícita del término general.

2) La función $h(x)$ está definida en el intervalo $[1, +\infty)$.

No podemos aplicar esta idea si en la expresión del término general aparece k^n, donde k es un número real negativo, una función de $n!$ o una suma que varía término a término.

Ejemplo 1.4.

Demostramos que la sucesión con término general $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ es monótona creciente.

Para comprobar que la función es monótona creciente definimos $h(n) = \dfrac{n}{n+1}$ y cambiamos n por x; entonces, $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Esta función se define en $[1, +\infty)$ y es derivable.

Calculemos su derivada: $h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Debido a que la derivada es siempre positiva, la sucesión es monótona creciente.

Ejercicios

1.10. Indicad en qué casos podemos estudiar el crecimiento de las sucesiones a partir del crecimiento de las funciones asociadas:

a) $x_n = \sqrt{n}$.

b) $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$.

c) $x_n = n + (n+1) + \cdots + 2n$.

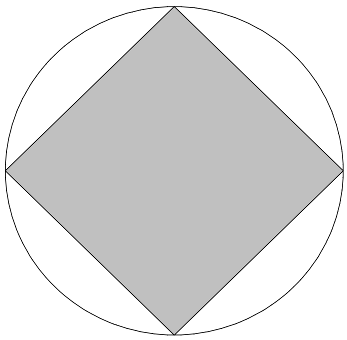
1.11. Demostrad que la sucesión con término general $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$ es acotada pero no es monótona.

1.12. Comprobad que la sucesión $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ es acotada.

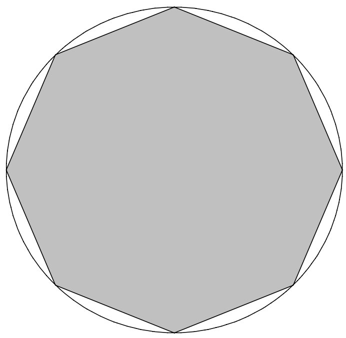
2. Límite de una sucesión

En el siglo III a.C., Arquímedes intentó calcular el número π. Su idea era utilizar una secuencia de polígonos regulares que tendían hacia el círculo.

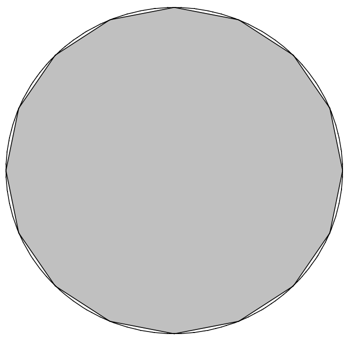
Construimos algunos polígonos regulares a partir del círculo de radio 1. Las figuras que obtenemos son:



Polígono 4 lados. Área $= 2$.



Polígono 8 lados. Área $= 2{,}828\ldots$



Polígono 16 lados. Área $= 3$.

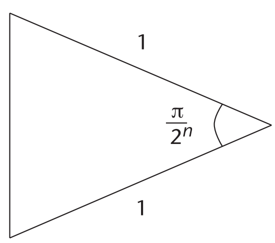
Observamos que la sucesión, además de ser creciente y estar acotada, parece que tiende hacia un número determinado, el área del círculo, que es π.

Ejercicios

2.1. Dada la sucesión $x_n = 1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots$, calculad los términos x_n de manera explícita y estableced hacia dónde intuís que tiende x_n.

2.2. Sea x_n el área de un triángulo isósceles de lado 1 y ángulo $\frac{\pi}{2^n}$. Sin hacer cálculos, explicad por qué la sucesión $x_1, x_2, x_3 \ldots$ es decreciente. ¿Hacia qué número tiende la sucesión?

Explicad gráficamente por qué la sucesión x_1, $2x_2$, $4x_3$, $8x_4$ … es creciente. Si tiende hacia un número en particular, ¿cuál es?



2.1. Límite de una sucesión

Uno de los conceptos más complicados al embarcarnos en un primer curso de análisis matemático es el de la convergencia. Consideremos la sucesión que se define mediante esta recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right).$$

Si calculamos los primeros términos, obtenemos la siguiente tabla:

n	x_n	x_n^2
1	1	1
2	2	4
3	1,75	3,0625
4	1,732142857	3,000318878
5	1,73205081	3,000000008

Notad que x_n^2 tiende a 3 y, por tanto, parece que la sucesión tiende a $\sqrt{3}$. Pero ¿qué significa que una sucesión tiende hacia un número?

Empecemos por determinar qué significa "tender a 0".

Ejemplo 2.1.

De las sucesiones que tenéis a continuación, ¿cuáles os parece que tienden a 0?

1) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8} \ldots$

3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \ldots$

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{8} \ldots$

5) $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8} \ldots$

Las sucesiones que parece que tienden a cero son la 2), la 3) y la 5), dado que podemos estar tan cerca de cero como queramos.

Por ejemplo, consideramos la sucesión 3), que viene dada por:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \dots$$

Supongamos que queremos encontrar el valor de n a partir del cual la sucesión sea menor que 0,1.

Puesto que $x_n = \dfrac{1}{n}$, si queremos que $x_n < 0{,}1$ es necesario que:

$$n > 10 \;\; (x_{11} = \frac{1}{11}, x_{12} = \frac{1}{12}, x_{13} = \frac{1}{13} \dots).$$

Vamos a ponerlo un poco más difícil: encontrad el valor de n a partir del cual la sucesión sea menor que 0,01.

Puesto que $x_n = \dfrac{1}{n}$, si queremos que $x_n < 0{,}01$, es necesario que:

$$n > 100 \;\; (x_{101} = \frac{1}{101}, x_{102} = \frac{1}{102}, x_{103} = \frac{1}{103} \dots).$$

Observad que no importa qué cota os pidan, por pequeña que sea (la llamaremos ε); siempre hay un elemento de la sucesión (N) que verifica $|x_N| < \varepsilon$, $|x_{N+1}| < \varepsilon$, $|x_{N+2}| < \varepsilon \dots$ y todos los términos son menores que ε.

En nuestro caso, si queremos encontrar el término a partir del cual $|x_n| < \varepsilon$, es necesario que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Por este motivo $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Para finalizar, podemos asegurar que $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, donde $[x]$ denota la parte entera del número x.

Ejercicio 2.3.

Considerad la sucesión $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

a) Encontrad el término a partir del cual $|x_n| < 0{,}1$.

b) Encontrad el término a partir del cual $|x_n| < 0{,}01$.

c) Encontrad el término a partir del cual $|x_n| < \varepsilon$.

A continuación presentamos el procedimiento que se sigue cuando queremos saber si una sucesión tiende hacia un número x:

Dado un número positivo ε, tan pequeño como se quiera, hay que encontrar un término de la sucesión, denominado N, tal que todos los términos de la sucesión se encuentren a una distancia de x menor que ε, es decir, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Ejemplo 2.2.

Dada la sucesión $x_n = 1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\ldots$, demostrad que tiende a $\frac{2}{3}$.

En la solución del ejercicio 2.1 hemos probado que $x_n = \dfrac{2+\frac{(-1)^n}{2^n}}{3}$.

Para comprobar si x_n tiende a $\frac{2}{3}$, sólo tenemos que ver que, dado ε, podemos encontrar un N a partir del cual $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2+\frac{(-1)^n}{2^n}}{3} - \frac{2}{3}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^n}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{3\cdot 2^n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{3\varepsilon} &< 2^n \\
\ln\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right) &< n\cdot\ln(2) \\
\frac{\ln\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)}{\ln 2} &< n
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $N > \dfrac{\ln\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)}{\ln 2}$.

Este cálculo es formal, puesto que por lo general no se utiliza para calcular el límite de una sucesión. Más adelante desarrollaremos otros métodos que nos evitarán la realización del cálculo de límites utilizando el juego de los ε.

Llegados a este punto, ya estamos preparados para presentar una definición formal. Una sucesión $\{x_n\}$ convergerá o tenderá al límite x si para cualquier número positivo (ε), tan pequeño como se quiera, encontramos un entero N que satisface $|x_n - x| < \varepsilon$ si $n > N$.

La sucesión $\{x_n\}$ converge o tiende a x si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Entonces, escribiremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ o bien que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Una sucesión se denomina **convergente** si x existe, y **divergente** en caso contrario.

Antes de empezar con las propiedades de los límites, vamos a detenernos un instante para analizar la definición que acabamos de dar.

La convergencia hace referencia al comportamiento de la cola de la sucesión. Así, si en una sucesión cambiamos los 10 primeros términos (o los 100 primeros o los 1.000 primeros), esto no afectará a la convergencia. !

Ejercicio 2.4.

Determinad un ejemplo de sucesión $\{x_n\}$ que sea divergente, pero tal que $\{|x_n|\}$ sea convergente.

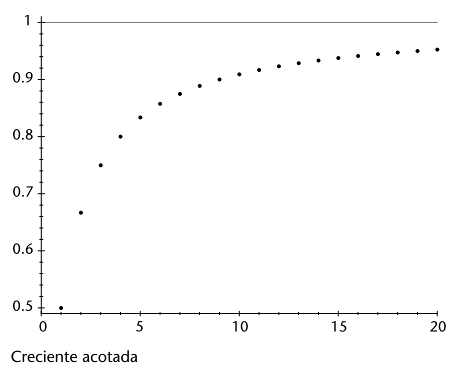
2.2. Propiedades del límite de una sucesión

Dada una sucesión x_n y un valor x, ya hemos visto el método para probar si la sucesión tiende o no al límite x. ¿Es posible que la sucesión tenga dos límites? El teorema que veremos ahora nos indica que esto no es posible, es decir, que cuando una sucesión converge, tiene límite único.

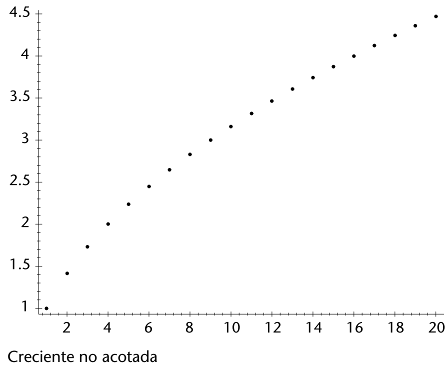
Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, entonces $x = y$. Una sucesión convergente tiene límite único.

Observad que toda sucesión convergente está acotada, ya que después de los primeros términos se ve restringida a moverse dentro de un lado.

Toda sucesión convergente es acotada.



Creciente acotada



Creciente no acotada

Definición

Decimos que k es cota superior de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_n < k$ para todo n.

Decimos que k es cota inferior de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_n > k$ para todo n.

Observamos que la segunda sucesión corresponde a $x_n = \sqrt{n}$; no es acotada y, en consecuencia, no puede converger (hemos probado que una sucesión convergente es acotada). En el gráfico de la izquierda hemos representado $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, que es convergente y parece converger hacia la menor cota superior de x_n.

Teorema de la convergencia monótona

a) Una sucesión creciente acotada superiormente $\{x_n\}$ es convergente y el límite es la menor de las cotas superiores.

b) Una sucesión decreciente acotada inferiormente $\{x_n\}$ es convergente y el límite es la mayor de las cotas inferiores.

Ejemplo 2.3.

Aplicamos el teorema a una sucesión curiosa. Probemos que la sucesión:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

tiene límite.

Recordemos que la función $\ln t$ viene dada por el área cerrada entre 1 y t de la función $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

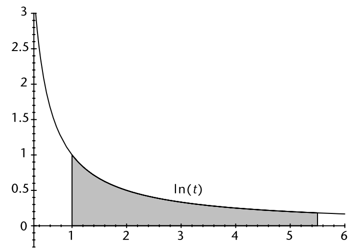
$$\ln t = \int_1^t \frac{1}{x} dx.$$

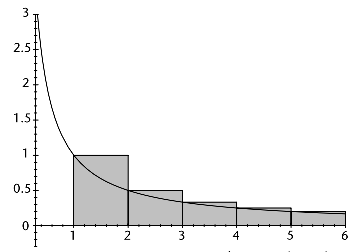
Observemos que el valor de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ es el área de los rectángulos (como podemos ver en la segunda figura del margen), de donde tenemos que la sucesión x_n es el área sombreada.

También se aprecia que x_n es creciente, ya que x_{n+1} es igual a x_n más el área entre $x = n$ y $x = n + 1$.

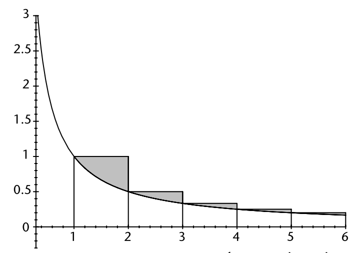
Y la sucesión está acotada por 1, puesto que los valores de x_n se pueden colocar en un cuadrado de área 1.

Esta sucesión es creciente y es acotada; por lo tanto, tiene límite. Su límite es la llamada *constante de Euler* $\gamma \approx 0.57...$





área sombreada = $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$



área sombreada = $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ln 6$

El teorema es útil en especial cuando las sucesiones vienen dadas por una relación de recurrencia. Es difícil aplicarlo en caso de que la sucesión se defina mediante su término general, porque no siempre resulta fácil ver que es acotada.

Ejercicios

2.5. Calculad el límite de $x_n = \sqrt[n]{x}$ para $x > 0$, demostrando antes la monotonía y la acotación de la función.

2.6. Considerad la sucesión definida por la recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Con $x_1 = 2$; estudiad la monotonía de la sucesión e indicad si está acotada y si tiene límite.

2.3. Aritmética de los límites finitos

A continuación veremos una serie de resultados que nos permiten calcular límites sin utilizar la definición.

Dadas las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, entonces:

1) Para cualquier número λ, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = x - y$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$.

5) Si $y \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = x^y$.

Una de las propiedades más útiles de la aritmética de los límites finitos es la denominada **regla del bocadillo**.

Regla del bocadillo

Si $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ son dos sucesiones convergentes tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$, si $x_n \leq y_n \leq z_n$ $\forall n > n_0$; entonces y_n es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Ejemplo 2.4.

Mediante el uso de la regla del bocadillo calculamos el límite de la sucesión de término general:

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}.$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}(n+1)\left[\min\left\{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \cdots, \frac{1}{(n+n)^2}\right\}\right] \quad &\leq \quad x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \leq \\ &\leq \quad (n+1)\left[\max\left\{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \cdots, \frac{1}{(n+n)^2}\right\}\right]\end{aligned}$$

Puesto que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es decreciente, entonces:

$$\begin{aligned}(n+1)\frac{1}{(n+n)^2} &\leq x_n = \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(n+n)^2} \leq \quad (n+1)\frac{1}{n^2}\\ \frac{n+1}{4n^2} &\leq x_n = \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tfrac{n}{(n+n)^2} \leq \quad \frac{n+1}{n^2}\end{aligned}$$

Hacemos un paso en el límite y tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n^2} &\leq \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \leq \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2}\\ 0 &\leq \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \leq \quad 0.\end{aligned}$$

Por la regla del bocadillo tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2} = 0.$

Ejercicio 2.7.

Con la ayuda de la regla del bocadillo, calculad los límites de:

a) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}.$

b) $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}.$

c) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}.$

d) $x_n = \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2}.$

e) $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + \cos n}.$

Como consecuencia de la regla del bocadillo, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema

Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\{y_n\}$ es una sucesión acotada (no necesariamente convergente), entonces $x_n \cdot y_n$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0.$

Ejemplo 2.5.

Calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}.$

Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y que $\sin n$ está acotada por 1. Por la propiedad anterior podemos asegurar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

2.4. Sucesiones con límite infinito

Hasta ahora sólo hemos tratado sucesiones que tienen límite acotado. Sin embargo, ¿qué sucede con las sucesiones crecientes y no acotadas, por ejemplo $1, 2, 3\ldots$ o bien $1, 4, 9\ldots$? Estamos tentados de afirmar que las sucesiones tienden a ∞.

Observad que no sólo las funciones monótonas crecientes son las que podemos esperar que tiendan a ∞. Considerad la sucesión de término general $\sqrt{n+(-1)^n}$; los primeros términos son $0, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{1.000}$, $\sqrt{1.003}\ldots$ ¿Os parece que tiene la propiedad de tender a ∞?

Cuando hemos definido el concepto de sucesión convergente hacia un número x, la idea ha sido dar un número tan pequeño como quisiéramos cercano a x, y ver que a partir de un determinado término, la sucesión estaba tan próxima a x como el número establecido, y que no se alejaba. Utilizaremos la misma idea para definir el concepto de tender a ∞.

¿Es cierto que la sucesión $x_n = \sqrt{n+(-1)^n}$ tiende a ∞? Es decir, ¿a partir de un determinado término, el resto toma valores superiores a 10? Este término es $x_{102} = \sqrt{103}$. ¿Es cierto que los términos de la sucesión son superiores a 100? La respuesta es que a partir de $x_{10.002} = \sqrt{10.003}$, sí. Y así podríamos estar “jugando hasta que nos cansásemos: sólo es necesario tener en cuenta que, dado un k arbitrariamente grande, hay que encontrar el término de la secuencia a partir del cual todos los términos siguientes son mayores que k.

Una sucesión $\{x_n\}$ **tiende a** $+\infty$ si para todo número real $K > 0$ existe un entero N tal que $\forall n > N$; en este caso, $x_n > K$. Lo denotaremos por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Una sucesión $\{x_n\}$ **tiende a** $-\infty$ si para todo número real $K < 0$ existe un entero N tal que $\forall n > N$; entonces, $x_n < K$. Lo denotaremos por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

2.5. Aritmética de los límites

En la aritmética de los límites finitos, todos los casos aparecen determinados, mientras que en la aritmética de los límites infinitos quedan casos indeterminados y no es posible determinar *a priori* el valor del límite.

Consideramos el caso $+\infty - \infty$. Presentamos ahora unos cuantos ejemplos:

- Sea $x_n = n$ y $y_n = -n^2$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.
  Y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n - n^2 = -\infty$.

- Sea $x_n = n$ y $y_n = -n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.
  Y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n - n = 0$.

- Sea $x_n = n^2$ y $y_n = -n$, en tal caso $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.
  Y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 - n = \infty$.

En cualquiera de los casos que hemos presentado sería necesario llevar a cabo un estudio particular.

A continuación presentamos una serie de tablas que restringen el límite de una suma, de un producto y de una potencia.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ \ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	$-\infty$	a	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
b	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Donde a y b son números reales.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ \ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	?	$-\mathrm{sgn}(a)\infty$	$-\infty$
0	?	0	0	?
b	$-\mathrm{sgn}(b)\infty$	0	$a\cdot b$	$\mathrm{sgn}(b)\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$\mathrm{sgn}(a)\infty$	$+\infty$

La función signo

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ \ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$	$-\infty$	0	c	$+\infty$
0	$+\infty$	?	0	0
a	$+\infty$	1	a^c	0
1	?	1	1	?
b	0	1	b^c	$+\infty$
$+\infty$	0	?	$+\infty$	$+\infty$

Donde $a \in (0,1), b > 1$ y $c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

No es lo mismo que el límite tienda a 1 que el hecho de que la sucesión sea constante igual a 1. El límite de la sucesión constante igual a 1 es 1.

2.6. ¿Cómo solucionar las indeterminaciones?

No existen reglas generales que nos permitan resolver los límites indeterminados; no obstante, se pueden dar algunas indicaciones.

2.6.1. Método general

Suponemos que tenemos el término general $x_n = h(n)$, donde $h(x)$ está bien definida para x lo bastante grande.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} h(x)$.

El método no se puede aplicar si aparecen expresiones de la forma $(-1)^n$, $n!$ o sumas en las que el número de términos depende de n.

Si el $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ no existe, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ puede existir o no.

Ejemplo 2.6.

Calculemos el $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Es un límite de la forma $0\cdot\infty$ y, por lo tanto, indeterminado.

Calculamos el límite pensando en que la variable es continua, y lo transformamos en un límite de la forma $\frac{0}{0}$ para poder aplicar la regla de LHôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1.
\end{aligned}$$

Puesto que el límite existe, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Ejemplo 2.7.

Consideremos el $\lim\limits_{n\to\infty}\big(n+(n+1)+\ldots+2n\big)$. Este límite no se puede calcular por el método general, ya que la cantidad de sumandos del término general depende de n.

Ejemplo 2.8.

Consideramos el $\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n)$. Aplicamos el método general y el $\lim_{x\to\infty} \sin(2\pi x)$ no existe, mientras que $\sin(2\pi n)$ es 0 para todo n. Por lo tanto, el $\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0$.

2.6.2. Caso 0^0 y ∞^0

Queremos calcular $\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n}$. Suponemos que $\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = l$; si tomamos logaritmos neperianos en cada miembro de la igualdad, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} y_n \ln x_n = \ln l,$$

de donde tenemos que:

$$l = e^{\lim_{n\to\infty} y_n \ln x_n}.$$

En tal caso, sólo tenemos que resolver la indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

Ejemplo 2.9.

Calculemos $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}}$.

El $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ y el $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, lo cual quiere decir que el $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}}$ es la de forma ∞^0 y, en consecuencia, indeterminado.

Aplicamos el hecho de que $l = e^{\lim_{n\to\infty} y_n \ln x_n}$ a nuestro caso:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}}.$$

Observamos que ahora tenemos un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ que ya se encuentra en la forma general; por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

De esta manera, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = e^0 = 1$.

2.6.3. Caso 1^∞

Este caso necesita algo de justificación. Comencemos por la sucesión:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Se puede demostrar que la sucesión $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es acotada y creciente y, por lo tanto, tiene límite. El valor de este límite recibe el nombre de número e.

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

En general, si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Conversión de la indeterminación 1^∞ a $0\cdot\infty$

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1)\,y_n}$$

Ejemplo 2.10.

Calculemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n,\ a>0 \text{ y } b>0.$$

Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$; por tanto, es de la forma 1^∞.

Aplicamos:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1)\,y_n};$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}-1\right)n}.$$

Para calcular el límite cambiamos la n por x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1\right)x &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1}{\frac{1}{x}} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a+b^{\frac{1}{x}}\ln b}{2}\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a+b^{\frac{1}{x}}\ln b}{2} = \\
&= \frac{\ln a+\ln b}{2} = \ln\sqrt{a\cdot b},
\end{aligned}$$

de donde tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = e^{\ln\sqrt{a\cdot b}} = \sqrt{a\cdot b}$.

2.6.4. Criterio de Stolz

Hasta el momento hemos estudiado situaciones donde era posible pasar al caso general.

El criterio de Stolz resulta útil especialmente para determinar el límite de sucesiones en las que aparecen sumas de términos que se incrementan con n.

Criterio de Stolz

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones donde $\{y_n\}$ es monótona creciente o decreciente e $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

o bien:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

Si existe $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, entonces tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lambda$.

Ejemplo 2.11.

Calculando $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$, vemos que $\{n^3\}$ es creciente y que $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$ y, por tanto, podemos aplicar el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}.$$

2.6.5. Desarrollo en polinomio de Taylor

Supongamos que queremos calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$. En este caso no podemos definir una función de x y aplicar la regla de LHôpital porque contiene una expresión $n!$. Cuando nos encontramos ante este problema, podemos utilizar desarrollos en polinomio de Taylor en $x = 0$. Esta técnica sólo es aplicable si el error que tenemos tiende a 0 cuando n tiende a ∞.

Observamos que el desarrollo en polinomio de Taylor de la función $\sin x$ cuando x está próxima de 0 es:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{O}(x^7).$$

Si $f(x)$ es una función tal que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^i}$ existe y el límite es finito, entonces decimos que $f(x) = \mathrm{O}(x^i)$ (se lee "$f(x)$ es del mismo orden que x^i").

Algunas de las propiedades de los $\mathrm{O}(x^i)$ son:

1) $\mathrm{O}(x^i) + \mathrm{O}(x^j) = \mathrm{O}(x^i)$ si $i \geq j$.

2) Si k es un valor constante, entonces $k\mathrm{O}(x^i) = \mathrm{O}(x^i)$.

3) $x^j\mathrm{O}(x^i) = \mathrm{O}(x^{i+j})$.

4) $\mathrm{O}(x^i)\mathrm{O}(x^j) = \mathrm{O}(x^{i+j})$.

Ejercicio 2.8.

Calculad los siguientes límites, si es que existen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+2}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+8n-1}{7n^3+6n}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{5n^2}$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}$.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

3. Series de números reales

Consideremos n números reales $a_1, \ldots, a_n$, la suma de los cuales es $a_1 + \cdots + a_n$. Una manera más compacta de presentar esta suma es mediante la notación siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, .$$

Recordemos algunas de las sumas finitas más conocidas:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ y } \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

El problema es qué sucede si en lugar de tomar un número finito de términos, tomamos un número infinito. Este problema se lo plantearon por primera vez en la antigua Grecia, y fue Zenón quien lo formuló indirectamente.

Aquiles trata de alcanzar una tortuga en movimiento que le lleva cierta ventaja. Durante el tiempo invertido por Aquiles en llegar a la posición donde se encontraba la tortuga, ésta ha realizado un pequeño desplazamiento. Así, cuando Aquiles recorre la distancia que le separa de la posición que ocupaba la tortuga, ésta ya ha vuelto a desplazarse. De este modo, Aquiles nunca llegará hasta la tortuga.

Imaginemos que la tortuga decide esperar a Aquiles; en tal caso, éste tendría que recorrer la mitad de la distancia que lo separa de la tortuga, después la mitad de la mitad, y así sucesivamente; en consecuencia, Aquiles nunca llegaría a la posición de reposo de la tortuga. Ante este concepto de regresión infinita, llegaremos a la conclusión de que Aquiles nunca hubiese podido empezar su desplazamiento y, por tanto, el movimiento es imposible.

Observad que este razonamiento se basa en la posibilidad de fraccionar el espacio (o el tiempo) en intervalos tan pequeños como queramos. Las matemáticas que modelan la realidad admiten posibilidades como ésta, lo cual llena de sentido los conceptos de continuidad y de cálculo infinitesimal. Desde un punto de vista matemático, un segmento es infinitamente divisible, mientras que un alambre no lo es. El segmento matemático es un modelo que permite estudiar la realidad física, no una copia fiel de la realidad, motivo por el cual nos resultará útil a la hora de estudiar problemas relacionados con cuerpos materiales (cuerdas vibrantes, cuerpos rígidos, etc.). Por otra parte, nos va a proporcionar el modelo del tiempo y el espacio como un **continuo**.

Realmente, el movimiento es observable. Los filósofos Aristóteles y Bergson han distinguido entre la posibilidad ideal de fraccionar de manera indefinida el espacio y el tiempo, y la posibilidad de hacerlo realmente. Si lo consideramos desde este punto de vista, la paradoja de Zenón no es tal paradoja.

Sin embargo, ya podéis suponer que esta manera de hacer las cosas no acaba de convencernos, ya que significaría, entre otras cosas, tener que cambiar las matemáticas, puesto que no modelarían la realidad que vemos.

Admitimos la posibilidad de fraccionar de manera indefinida el tiempo y el espacio, lo cual nos conduce a la introducción del concepto de serie.

Para evitar encontrarnos con dos cuerpos moviéndose, supondremos que la tortuga está parada a una distancia de una unidad de Aquiles. También supondremos que Aquiles está situado en el centro de coordenadas y que se mueve con una velocidad uniforme v. Observamos que Aquiles tarda $\frac{1}{2v}$ para llegar a una distancia de $A_1 = \frac{1}{2}$ unidades de la tortuga. Para recorrer la mitad de la distancia que separa a Aquiles de la tortuga ($\frac{1}{4}$ unidades), el tiempo es $\frac{1}{4v}$. Y así sucesivamente.

Si denominamos A_0 el punto de partida y A_n los puntos donde se sitúa Aquiles sucesivamente, la distancia que ha recorrido Aquiles cuando se encuentra en A_n es $1-\frac{1}{2^n}$, y el tiempo que ha necesitado es $\frac{1}{2v}+\frac{1}{2^2v}+\ldots+\frac{1}{2^nv}$. ¿Cuánto vale esta suma?

No olvidemos que Aquiles se mueve a una velocidad constante (v) y, debido a que la distancia recorrida es $1 - \frac{1}{2^n}$, tenemos que el tiempo que ha necesitado Aquiles es $T_n = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Por tanto:

$$\frac{1}{2v} + \frac{1}{2^2v} + \ldots + \frac{1}{2^nv} = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Cuando n tiende a infinito, tenemos que la distancia tiende a 1 y el tiempo que tarda Aquiles en atrapar a la tortuga es $\frac{1}{v}$. Observad que Zenón no tuvo en cuenta que la acumulación indefinida de cantidades (espacios o tiempos) puede tener como consecuencia una cantidad finita (es decir, un número). Debemos a Eudoxo y Arquímedes la primera formulación de la idea de que cantidades finitas se alcanzan por acumulación de cantidades infinitas. Sin embargo, hasta la llegada de Euler no se llevará a cabo su formulación completa.

3.1. Concepto de serie

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Consideramos la sucesión asociada $\{S_n\}$ de sus **sumas parciales**:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Se conoce como **serie** la pareja formada por las dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{S_n\}$, que representaremos mediante el símbolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Una serie es **convergente** si converge la sucesión de sus sumas parciales, y denominamos **suma de la serie** el límite de la sucesión de sus sumas parciales, que representamos mediante el símbolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si una serie no es convergente, se denomina **divergente**.

Notación

El símbolo $\sum a_n$ denota $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, donde n_0 es un número natural.

Observad que una serie es un tipo muy particular de sucesión.

3.2. Series geométricas

Al empezar el apartado ya estuvimos viendo esta serie que se conoce por **serie geométrica de razón *k*** en $\sum k^n$. Si la n empieza a partir de 0, se trata de la serie $1 + k + k^2 + \cdots + k^n + \cdots$

Partimos de la sucesión de las sumas parciales hasta el término n; en tal caso:

$$S_n = 1 + k + k^2 + \cdots + k^n.$$

La ventaja de hacer sumas parciales es que podemos multiplicar y sumar de la manera tradicional. Por tanto:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + k + k^2 + \cdots + k^n, \\ kS_n &= k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n+1}. \end{aligned}$$

Tras restar ambas expresiones, tenemos:

$$kS_n - S_n = k^{n+1} - 1.$$

Por tanto:

$$S_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Puesto que la serie es el límite de las sumas parciales, nos encontramos con que esta serie converge si $|k| < 1$ y su límite es $\sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{1}{1-k}$.

- Para $|k| > 1$, el límite de la sucesión de sumas parciales tiende a infinito.

- Para el caso $k = 1$ tenemos que:

$$S_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1.$$

  Por tanto, la sucesión de sumas parciales tiende a infinito.

- Para $k = -1$ nos encontramos con que:

$$S_n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n.$$

  Entonces, si $n = 2k$, tenemos que $S_{2k} = 1$; si $n = 2k+1$, obtenemos que $S_{2k+1} = 0$. Por tanto, la sucesión de las sumas parciales es oscilante: en algunas ocasiones es 0 y en otras es 1. En este caso, dado que la sucesión no converge, la serie es divergente.

Convergencia de la serie geométrica según los valores de k:

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i \text{ es } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } |k| < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } |k| \geq 1 \end{cases}$$

Además, si $|k| < 1$ su suma es $\frac{1}{1-k}$.

Ejemplo 3.1.

Calculemos $\sum_{n=m}^{\infty} k^n$ con $|k| < 1$.

Escribimos primero la suma parcial hasta el término n con $m < n$; entonces:

$$S_n = k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \cdots + k^n.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} S_n &= k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \cdots + k^n, \\ kS_n &= k^{m+1} + k^{m+2} + k^{m+3} + \cdots + k^{n+1}. \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones, tenemos:

$$kS_n - S_n = k^{n+1} - k^m,$$

que permite escribir:

$$S_n = \frac{k^{n+1} - k^m}{k - 1}.$$

Si pasamos al límite cuando n tiende a infinito, tenemos:

$$\sum_{i=m}^{\infty} k^i = \frac{k^m}{1-k}.$$

Este ejemplo nos permitirá ilustrar el siguiente teorema:

La **inserción** o la **supresión** de un número finito de **términos** en una serie convergente no influye en su convergencia, pero sí en su suma.

Si se añade o se suprime un número finito de términos en una serie divergente, ésta continúa siendo divergente.

Observamos que hemos conseguido llegar al estudio completo de la serie geométrica: tenemos la capacidad de determinar su convergencia y, en caso de que sea convergente, también podemos calcular su suma.

La serie geométrica es convergente. En este caso, si $|k| < 1$:

$$\sum_{i=m}^{\infty} k^i = \frac{k^m}{1-k}.$$

A la hora de estudiar una serie, nos planteamos dos preguntas fundamentales:

a) ¿Cuándo es convergente una serie?

b) Si la serie es convergente, ¿cuál es el valor de su suma?

3.2.1. La sucesión a_n debe tender a cero

Si una serie es convergente, entonces la sucesión $\{a_n\}$ debe tender a 0. Si $\{a_n\}$ tendiese a una constante K, entonces la sucesión de las sumas parciales, para n grande, se comportaría como nK. Esta sucesión no se encuentra acotada, de manera que la serie es divergente.

Si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

El hecho de que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no implica que $\sum a_n$ sea convergente.

Esto significa que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria pero no suficiente.

Como veremos en el siguiente apartado, existen series cuyo término general tiende a 0 pero la serie diverge.

Este criterio resulta inútil si lo que queremos saber es si una serie es divergente: sólo hay que ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Ejemplo 3.2.

Vamos a estudiar si existe alguna posibilidad de que la serie $\sum \frac{1}{n!}$ sea convergente.

Ya que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$, entonces puede ser convergente o no.

Ejemplo 3.3.

Ahora estudiaremos si hay posibilidades de que la serie $\sum n$ sea convergente.

Puesto que $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, podemos asegurar que es divergente.

Ejercicio 3.1.

Determinad de entre estas series cuáles pueden ser convergentes:

a) $\sum \frac{b^n}{n}$. **b)** $\sum \frac{b^n}{n!}$. *c)* $\sum n^p$.

Nota: Podéis usar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

3.3. La serie armónica generalizada

Si una serie converge, entonces los números a_n deben tender 0, cuando n es grande. Podemos encontrar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ en los que la serie no converge, aunque:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Consideramos ahora la misma paradoja que la de Zenón, suponiendo que la velocidad decrece gradualmente, de manera que Aquiles necesita T minutos para ir de 1 a $\frac{1}{2}$, $\frac{T}{2}$ minutos para ir de $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$, $\frac{T}{3}$ minutos para ir de $\frac{3}{4}$ a $\frac{7}{8}$ y, en general, $\frac{T}{n}$ minutos para ir de $\frac{1}{2^{n-1}}$ a $\frac{1}{2^n}$.

La serie infinita que vemos a continuación representa el tiempo total que necesita para la carrera:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \cdots + \frac{T}{n} + \cdots$$

En este caso, la experiencia física no sugiere ninguna "suma" obvia o natural para asignar a esta serie, de ahí que sumemos de manera matemática.

Podemos ver cómo se comporta la serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

sumando sus términos con la ayuda de un ordenador. Entonces observaremos que a partir de un término determinado, la suma acumulada deja de crecer. Y esto sucede porque, a partir de un momento dado, los términos que se acumulan son tan pequeños en comparación con la suma ya acumulada, que el número de dígitos que muestra el ordenador no refleja el incremento que se produce en la suma. Este hecho puede inducirnos a pensar que la llamada *serie armónica* es convergente; sin embargo, no es así.

Para comprobar que una sucesión (en este caso, la de las sumas parciales) no converge, sólo hay que ver que alguna de las subsucesiones no converge. Consideramos la sucesión indicada por las sucesivas potencias de 2, $k_n = 2^n$ con $n = 1, 2\ldots$ El razonamiento que seguiremos se lo debemos al matemático francés Nicolás de Oresme (s. XIV):

$$\begin{aligned}
S_{k_n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}= \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)> \\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)= \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Es evidente que S_{k_n} se hace tan grande como queramos y que, por lo tanto, $\sum \frac{1}{n}$ es divergente.

La generalización de la serie armónica es:

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

y se denomina **serie armónica generalizada.**

Convergencia de la serie armónica generalizada en función de los valores de p:

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ es } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } p > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

3.4. Propiedades generales de las series

Las propiedades de mayor relevancia que verifican las series son éstas:

1) Si añadimos o suprimimos un número finito de términos que sumen A, la serie nueva tiene el mismo carácter que la primera. Si la primera serie es convergente y su suma es S, entonces la suma de la segunda serie es $S \pm A$, que modifica la suma pero no el carácter de la serie.

2) El carácter de una serie no cambia si multiplicamos por un número $k \neq 0$. En este caso: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes con límites S_1 y S_2, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right) = S_1 + S_2$.

4. Series de términos positivos

4.1. Definición

Una serie es de **términos positivos** si el término general es siempre positivo, es decir, $a_n > 0$ para todo valor de n. Los criterios que se siguen hacen referencia a las series de términos positivos.

4.2. Criterios de comparación

A continuación vamos a explicitar un par de criterios que, de hecho, ya hemos utilizado.

Comparación por diferencia

Dadas dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tales que $a_n \leq b_n$ $\forall n$ si $n \geq n_0$:

a) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

b) Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Ejemplo 4.1.

Demostremos que $\sum \frac{1}{2^n+1}$ es convergente.

Puesto que $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces $\sum \frac{1}{2^n+1}$ es convergente.

Ejemplo 4.2.

Demostremos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ es divergente.

Debido a que $\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, entonces $\sum \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ es divergente.

Comparación por paso al límite por división

Si tenemos dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$:

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq 0$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

Ejemplo 4.3.

Demostremos que $\sum \frac{1}{2^n-1}$ es convergente.

Observamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = 1.$$

Al ser $\sum \frac{1}{2^n}$ convergente, entonces $\sum \frac{1}{2^n-1}$ es convergente.

A la hora de estudiar el carácter de una serie es conveniente simplificar su término general.

Ejemplo 4.4.

Probamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}$ es convergente.

Cuando $n \to \infty$, podemos ver que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$ y que $1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 1$. Por tanto, el término dominante es 2^n.

Si comparamos el término general de la serie con $\frac{1}{2^n}$ tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = e.$$

Puesto que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente y el límite del cociente es finito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}$$

es convergente.

4.2.1. Criterio de Pringsheim

A estas alturas ya hemos estudiado dos series de términos positivos: la serie geométrica y la serie armónica generalizada.

Supongamos que ahora queremos estudiar la convergencia de una serie de término general a_n. Aplicamos el criterio de comparación por paso al límite con la serie armónica generalizada.

Recordemos que la serie armónica generalizada verifica:

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ es } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } p > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

Si $b_n = \dfrac{1}{n^p}$, lo único que tenemos que hacer es calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$. Mediante el criterio de comparación de la división tenemos:

1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n < \infty$ y $\sum \dfrac{1}{n^p}$ converge, entonces $\sum a_n$ converge. (Donde $\sum \dfrac{1}{n^p}$ converge sólo si $p > 1$.)

2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n \neq 0$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge. (Donde $\sum \dfrac{1}{n^p}$ diverge si $p \leq 1$.)

Criterio de Pringsheim

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n < \infty$ y $p > 1$, entonces $\sum a_n$ converge.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n \neq 0$ y $p \leq 1$, entonces $\sum a_n$ diverge.

Observaciones

1) Resulta especialmente útil cuando tenemos expresiones del tipo n^α. Por este motivo será conveniente aplicar infinitésimos que transformen las funciones en expresiones polinomiales.

2) El número p se elige, en general, como la diferencia de grados entre el denominador y el numerador.

Ejemplo 4.5.

Estudiemos el carácter (la convergencia o la divergencia) de $\sum \dfrac{n+2}{n^3 + 3 \cdot \sin n}$.

La función seno está acotada cuando $n \to \infty$. Puesto que el numerador es de grado 1 y el denominador grado 3, entonces $p = 3 - 1 = 2$.

Compruebémoslo:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{n+2}{n^3 + 3 \cdot \sin n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + 3\frac{\sin n}{n^3}} = 1.$$

Puesto que el límite es finito y $p = 2 > 1$, entonces tenemos que $\sum \dfrac{n+2}{n^3 + 3 \cdot \sin n}$ es convergente.

Ejemplo 4.6.

Estudiemos el carácter (la convergencia o la divergencia) de $\sum \frac{\ln n}{n^2}$.

El criterio general es igualar las potencias del numerador y del denominador. Por este motivo, tendríamos que escoger $p = 2$.

Calculemos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

El límite es ∞ y $p = 2 > 1$. Por lo tanto, el criterio no decide.

Si escogemos $p = 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n^1 \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Calculamos este límite aplicando la regla de L'Hôpital al límite de la función asociada:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} n^1 \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Debido a que el límite resulta 0 y $p = 1$, el criterio no decide.

Pero nadie está diciendo que las p tengan que ser enteras. Escogemos $p = 1 + \dfrac{1}{2}$; entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+\frac{1}{2}} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

El límite es 0 y $p = 1 + \dfrac{1}{2} > 1$. Ahora estamos en condiciones de aplicar el criterio de Pringsheim y, por tanto, la serie $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ es convergente.

4.2.2. Criterio que proviene de la serie geométrica

Ya hemos encontrado un criterio que utiliza la serie armónica generalizada como modelo. Sin embargo, recordemos que teníamos otra serie, la geométrica, que verifica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i \text{ es } \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } |k| < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } |k| \geq 1 \end{cases}$$

¿Cuándo podemos afirmar que una serie se comporta como la serie geométrica?

Observemos que el término general de la serie geométrica es $a_n = k^n$ y recordamos que al desarrollar el tema de sucesiones ya habíamos estudiado diferentes formas de determinar que una sucesión en el límite se comporta como k^n.

Una primera manera de decirlo es: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Esto quiere decir que en el límite $a_{n+1} = ka_n$ y que, por tanto, se comporta como si fuese $a_n = k^n$.

Dado que la serie geométrica es convergente si $k < 1$, entonces tenemos que $\sum a_n$ es convergente. Análogamente, si $k > 1$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

El caso $k = 1$ es dudoso.

Aplicad este criterio a la serie armónica generalizada.

Criterios del cociente y de la raíz

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, suponemos que

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lambda$ (cociente) o bien $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ (raíz). Entonces:

a) Si $\lambda < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $\lambda > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

c) Si $\lambda = 1$, el criterio no decide.

Es conveniente aplicar el criterio del cociente cuando hay expresiones de la forma k^n o $n!$.

Es conveniente aplicar el criterio de la raíz en caso de que haya expresiones de la forma n^n.

A veces es conveniente sustituir $n!$ por $e^{-n}\, n^n \sqrt{2\pi n}$ (fórmula de Stirling).

Ejemplo 4.7.

Determinemos para qué valores de $p > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} np^n$ converge.

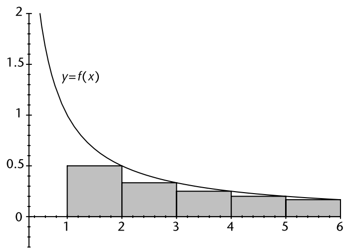
Si queremos aplicar el criterio del cociente, antes tenemos que calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)p^{n+1}}{np^n} = p \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = p.$$

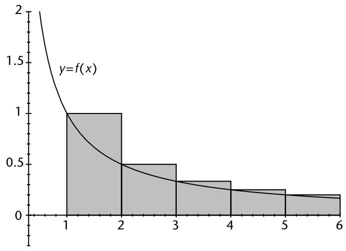
Por tanto, la serie es convergente si $0 < p < 1$ y es divergente si $p > 1$. Para $p = 1$, el criterio no decide. Sin embargo, para $p = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Puesto que el término general no tiende a 0 ($\lim_{n\to\infty} n = \infty$), tendremos que para $p = 1$ es divergente.

La serie converge si $0 < p < 1$ y diverge si $p \geq 1$.

4.2.3. Criterio de la integral



Suma por defecto



Suma por exceso

Consideremos una función $y = f(x)$ decreciente $\forall x \geq n_0$; entonces, como podemos ver en el gráfico del margen:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^\infty f(x)dx.$$

Análogamente:

$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Puesto que la integral y las series están encajonadas, se puede afirmar que la serie y la integral tienen el mismo carácter.

Criterio de la integral

Sea $y = f(x)$ una función tal que $f(x) > 0$ y decreciente para $x \geq n_0$. Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ y $\int_1^\infty f(x)$ tienen el mismo carácter.

Ejemplo 4.8.

Vamos a determinar el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

El término general de la serie se establece a partir de $f(n) = \frac{1}{n \cdot \ln n}$; por lo que tiene sentido definir la función real $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Observad que sólo nos interesa lo que pasa en el infinito, motivo por el cual el extremo inferior es siempre arbitrario.

$$\int_a^\infty \frac{1}{x \ln x} = \lim_{c\to\infty} \int_a^c \frac{1}{x \ln x} = \lim_{c\to\infty} \ln \ln x|_a^c = \lim_{c\to\infty} \ln \ln c - \ln \ln a = \infty.$$

Dado que la integral es divergente, tenemos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ también es divergente.

Ejercicios

4.1. Estudiad la convergencia o la divergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)(4n-3)}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$. **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$. **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$. **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$. **g)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot n^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$. **j)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

4.2. Determinad para qué valores de $x > 0$ las series que tenemos a continuación son convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

4.2.4. Estimación del error

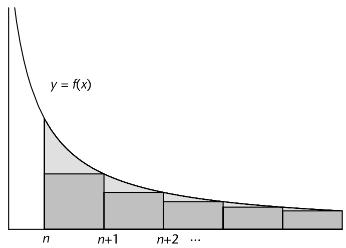
Uno de los problemas con que nos encontramos a la hora de estudiar series es que tenemos la capacidad de determinar si convergen, pero en caso de que converjan es bastante difícil determinar con exactitud cuál es su suma.

En la práctica, sólo nos interesa determinar la suma con una cierta precisión y, para hacerlo, sumamos un número finito de términos. Es decir, queremos calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en lugar de esto, calculamos $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n$; entonces, el error que cometemos es:

$$Err_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

Pero si escribimos $a_n = f(n)$ y $f(x)$ es una función positiva monótona decreciente, se tiene que:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leq \int_k^{\infty} f(x)dx,$$



ya que el valor de la integral es el área delimitada por la curva y el eje X, y la suma de la serie es la suma de las áreas de los rectángulos.

Cuando $a_n = f(n)$ y $f(x)$ es monótona decreciente, entonces:

$$Err_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leq \int_k^{\infty} f(x)dx.$$

Ejemplo 4.9.

Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1) Demostraremos que es convergente.

2) Aproximaremos el valor de la suma de la serie utilizando los cinco primeros términos y aportaremos una estimación del error.

3) Si queremos calcular la serie con un error menor que 10^{-8}, ¿cuántos términos tendríamos que sumar?

1) La serie es convergente porque es la serie armónica con $p = 2$.

2) La suma de los cinco primeros términos es:

$$S_5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = \frac{5.269}{3.600} \approx 1{,}46361111.$$

Para calcular el error aplicamos que:

$$Err_5 = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_5^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Sólo tenemos que calcular la integral:

$$\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to\infty} \int_5^{c} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_5^c = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{c} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1{,}5 \pm 0{,}2.$

3) Si nos piden la cantidad de términos que tenemos que sumar para que el error sea menor que $0.5 \cdot 10^{-8}$, tendremos que calcular en qué momento la cota del error es menor que esta cantidad. Por lo tanto:

$$Err_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to\infty} \int_n^{c} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_n^c = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{c} = \frac{1}{n}.$$

Si queremos que $Err_n < 10^{-8}$, entonces $\frac{1}{n} < 10^{-8}$, de donde tenemos que $n > 10^8$.

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora se ha supuesto que la función $f(x)$ era decreciente para $x \geq 1$. Se podría hacer exactamente lo mismo en caso de que $f(x)$ fuese decreciente cuando $x \geq a$. En tal caso, se debería imponer que $n \geq a$.

Ejemplo 4.10.

Nos proponemos demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ es convergente y determinar el número de términos que hay que sumar si queremos calcular la serie con un error menor que 0,1.

Partimos de $f(x) = xe^{-x}$ y observamos que $f'(x) = -(x-1)e^{-x}$; llegaremos a la conclusión, entonces, de que la serie es decreciente si $x > 1$. En este caso:

$$\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n} \leq \int_1^{\infty} xe^{-x} dx.$$

Calculamos la integral por partes:

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c xe^{-x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} -(x+1)e^{-x}\bigg|_1^c = 2e^{-1}.$$

Si queremos determinar el número de términos que necesitamos para calcular la integral con un error menor que 0,1, tenemos que utilizar la cota de la integral. Sin embargo, para que podamos aplicarla necesitamos que ésta sea decreciente; por tanto, sólo podremos acotar la cola para $n > 1$.

Calculamos cuando:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} ie^{-i} \leq 0{,}1.$$

Aplicamos la cota del error:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} ie^{-i} \leq \int_n^{\infty} xe^{-x}dx = (n+1)e^{-n}.$$

Como se ve, sólo es necesario que determinemos para qué valor de n tenemos que $(n+1)e^{-n} < 0,1$.

Si ahora damos valores a la n vemos que para $n = 3(3+1)e^{-3} = 4e^{-3} = 0{,}19915$ y para $n = 4(4+1)e^{-4} = 5e^{-4} = 0{,}091578 < 0{,}1$. Por lo tanto, $n \geq 4$.

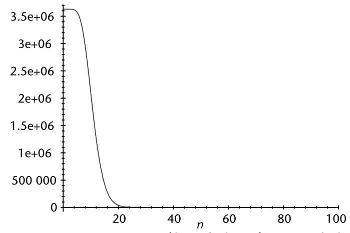


Gráfico de los términos de la sucesión $(n+1)e^{-n}$

Ejercicio 4.3.

Para las siguientes series, calculad:

1) La suma de los cuatro primeros términos.

2) El error que cometemos al aproximar la serie por la suma de los cuatro primeros términos.

3) Cuántos términos tenemos que sumar si queremos un error menor que 0,01.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

El criterio de la integral nos ha permitido calcular las sumas y acotar los errores a partir de una integral impropia. Sin embargo, se podría hacer lo mismo si, en lugar de acotar por una integral, lo hacemos por una serie que sabemos sumar.

Suponemos que $a_i \leq b_i \; \forall y \geq n_0$. Sea $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$; entonces:

$$Err_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i.$$

El problema de utilizar este criterio viene dado por la dificultad de encontrar b_i.

Ejemplo 4.11.

Calculamos el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ con un error menor que 0,01.

Para calcular el valor aproximado de la serie, sumaremos los n primeros términos; por este motivo tenemos que calcular a partir de qué valor n, $Err_n < 0{,}01$.

Observamos que $1+2^n > 2^n$ y, por lo tanto, $\dfrac{1}{1+2^n} < \dfrac{1}{2^n}$. Así pues:

$$Err_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

En caso de que queramos que $Err_n < 0{,}01$, impondremos que $\frac{1}{2^n} < 0{,}01$. Por tanto, $n > \log_2 100 = \frac{\ln 100}{\ln 2} = 6{,}643856189$. Esto significa que $n \geq 7$.

Por lo tanto: $S \approx \displaystyle\sum_{n=1}^{7} \frac{1}{2^n+1} = 0{,}7567075575 \simeq 0{,}76.$

Ejercicio 4.4.

Calculad el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ con un error menor que 0,01.

5. Series alternadas

5.1. Concepto de serie alternada

Hasta el momento hemos estudiado series de términos positivos. Cuando las series tienen términos positivos y negativos, su estudio resulta mucho más complicado. En esta parte del módulo sólo vamos a estudiar con detalle un tipo de series que tienen términos positivos y negativos, es decir, las **series alternadas**.

Una serie es **alternada**, si es de la forma:

$$\sum(-1)^n a_n \text{ con } a_n > 0 \ \forall n.$$

Una forma de simplificar su estudio es definir un nuevo concepto: el de **serie absolutamente convergente**.

Una serie $\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum |a_n|$ es convergente.

Observación

Si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces $\sum a_n$ también es convergente.

Observad que $\sum |a_n|$ es de términos positivos. Su convergencia se estudia mediante los criterios del apartado anterior.

Ejemplo 5.1.

Queremos demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ es convergente.

Para verlo, estudiamos su convergencia absoluta. Sólo tendremos que demostrar, en este caso, que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

Por este motivo, aplicamos el criterio del cociente, así:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n-1!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Puesto que $\lambda < 1$, entonces $\sum \frac{1}{n!}$ es convergente; así, la serie es absolutamente convergente y, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ también es convergente.

A continuación presentamos la herramienta que nos permitirá estudiar las series alternadas:

Teorema de Leibniz

Si tenemos una sucesión a_n monótona decreciente de términos positivos, entonces: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo 5.2.

Estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Observamos que esta serie no es absolutamente convergente, porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Intentamos aplicar el criterio de Leibniz.

Observamos que el término general de la serie es $a_n = \frac{1}{n}$. Definimos $f(x) = \frac{1}{x}$; es una función decreciente porque $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Y, puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces es convergente.

Ejercicios

5.1. Determinad cuáles de las siguientes series convergen y cuáles no:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \cos 3n}{n^2+n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$.

5.2. Decid cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son absolutamente convergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+n}$. **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

La gran ventaja que nos aportan las series alternadas es que podemos calcular con mucha facilidad la suma aproximada de la serie.

Criterio de Abel

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es alternada, $|a_n|$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Si $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces:

$$Err_k = \left| \sum_{n=1}^{k} a_n - S \right| < |a_{k+1}|.$$

O, dicho de otra manera, si sólo sumamos los k primeros términos, entonces el valor hacia donde tiende la serie dista de esta suma el valor del primer término que negligimos.

Ejemplo 5.3.

Calculamos $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ con un error menor que 0,001.

Observamos que $|a_n| = f(n) = \frac{1}{n}$. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ y, en consecuencia, es decreciente para $x > 0$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, por el teorema de Abel tenemos que la serie converge.

Si aproximamos la serie por la suma de los primeros n términos, entonces $Err_n \leq \frac{1}{n+1}$. Si queremos que $Err_n \leq 0{,}001$, en tal caso $n+1 \geq \frac{1}{0{,}001}$, de donde tenemos que $n \geq 999$.

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \approx \sum_{n=1}^{999} \frac{(-1)^n}{n} = -0{,}6936474306$.

Ejemplo 5.4.

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n p^n}{n!}$. ¿Para qué valores de p converge la serie?

Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n p^n}{n!} = 0$, si queremos aplicar el criterio de Leibniz, tenemos que ver que $a_n = \frac{p^n}{n!}$ es decreciente. Debido a que en esta serie aparecen expresiones $n!$, no podemos aplicar el test de la derivada. Dado que aparecen expresiones $n!$, para ver que $a_{n+1} < a_n$ sólo tendremos que comprobar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pero:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{p^{n+1}}{n+1!}}{\frac{p^n}{n!}} = \frac{p}{n+1}.$$

En caso de que $n > p$, entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ y, por lo tanto, la serie alternada es convergente para todo p.

Ejercicio 5.3.

Considerad las series que tenéis a continuación:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{-n}}{n}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{1}{n}$.

1) Demostrad que las series son convergentes.

2) Calculad S_4 y determinad el error que cometemos al aproximar el valor de la serie con S_4.

3) Determinad el número de términos que necesitamos si queremos calcular la serie con un error menor que 0,001.

6. Series de potencias

En una computadora somos capaces de definir sumas y productos, de ahí que los polinomios estén definidos y se puedan calcular. Sin embargo, supongamos que queremos calcular e^x o $\sin x$. En general, el problema con el que nos encontramos es cómo podemos aproximar una función, $f(x)$, para un polinomio, $T_n(x)$; ya hemos visto antes la solución a este problema, y ésta consiste en desarrollar un polinomio de Taylor.

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}.$$

Si en lugar de sumar n términos hacemos que n tienda a ∞, tendremos una serie de la forma:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}.$$

Ante todo esto, es probable que nos preguntemos si $f(x) = T(x)$ o, dicho de otro modo, si el valor de la función y de la serie coinciden para cualquier valor de x. Intentaremos responder a esta pregunta a lo largo de este módulo; aunque estamos en condiciones de adelantar que la respuesta, en general, es no.

Ejemplo 6.1.

Nos disponemos a determinar la serie de Taylor de la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ para $a = 0$.

Observamos que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Calculamos $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$; entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{x^4}}{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \\ &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} 3\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0. \end{aligned}$$

En general, se puede deducir (¡aunque no es necesario que lo hagáis!) que $f^{n)}(0) = 0 \forall n$ y, por tanto, $T(x) = 0$, que no es igual a $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

6.1. Concepto de serie de potencias

Una serie de potencias es una generalización de un polinomio de Taylor.

Una serie de la forma $\sum a_n(x-a)^n$ se denomina **serie de potencias**.

Observemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ es una serie de potencias donde $a=0$ y $a_n=1$ para todo n. No olvidéis que esta serie es la geométrica y su suma es $\frac{1}{1-x}$ si $|x|<1$.

Dada una serie de potencias, nos preguntamos para qué valores de x la serie converge. No obstante, tenemos un problema: la serie que obtenemos no tiene por qué ser alternada ni de términos positivos, motivo por el cual estudiaremos su convergencia absoluta.

La serie que estamos considerando es $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x-a|^n$ y, al ser de términos positivos, podemos aplicar el criterio del cociente y asegurar convergencia si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-a| < 1$.

El $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ se conoce como **radio de convergencia** y se denota por R.

Si $x \in (a-R, a+R)$, entonces la serie es absolutamente convergente.

A continuación aparecerá enunciado el resultado más importante que resuelve el problema de la convergencia de una serie de potencias.

Si $x \in (a-R, a+R)$, entonces $T(x) = f(x)$.

Ejercicios

6.1. Calculad el radio de convergencia de las series que tenéis a continuación:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

6.2. Calculad para qué valores de x la serie es absolutamente convergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$. **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$.

Una serie de potencias muy importante viene dada por $a_n = \frac{f^{n)}(a)}{n!}$. En este caso, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ recibe el nombre de *serie de Taylor*.

Ejemplo 6.2.

Calculamos la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ cuando $a = 0$. Observamos que $f^{n)}(x) = e^x$ para todo n y, por tanto, $f^{n)}(0) = 1$. Así pues, la serie de Taylor de la función e^x es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

6.2. Propiedades de las series de potencias

En este apartado veremos algunas propiedades de las series de potencias que nos van a permitir determinar sumas de series que serían difíciles de encontrar sin estas herramientas.

6.2.1. Derivación de una serie de potencias

Consideramos la serie $\sum a_n(x-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ y sea $f(x)$ para $x \in (a-R, a+R)$ la función hacia donde converge la serie de potencias.

Entonces, la serie $\sum na_n(x-a)^{n-1}$ con radio de convergencia R converge hacia $f'(x)$ si $x \in (a-R, a+R)$.

Ejemplo 6.3.

Calculamos la serie de potencias de la función $\frac{1}{(1-x)^2}$ a partir de $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Partimos de:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ si } |x| < 1.$$

Derivando los dos lados, tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Y si reordenamos los términos tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

6.2.2. Integración de una serie de potencias

Consideramos la serie $\sum a_n(x-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ y sea $f(x)$ para $x \in (a-R, a+R)$ la función hacia donde converge la serie de potencias. En tal caso, la serie $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ con radio de convergencia R converge hacia $\int_a^x f(s)ds$ si $x \in (a-R, a+R)$.

Ejemplo 6.4.

Calculamos la serie de potencias de la función $\ln(1+x)$ a partir de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Partimos de:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ si } |x| < 1.$$

Y cambiamos x por $-x$; entonces:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Integrando en cada lado tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+s}ds &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
\ln(1+x) - \ln 1 &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Ejercicios

6.3. Partiendo de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, calculad el desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = \arctan x$.

6.4. Calculad $\int_0^1 e^{x^2}dx$ con un error menor que 0,001, utilizando la serie de Taylor de $f(x) = e^x$.

7. Los números complejos

Muchos de los fenómenos relacionados con señales son más fáciles de explicar mediante los números complejos que con los números reales.

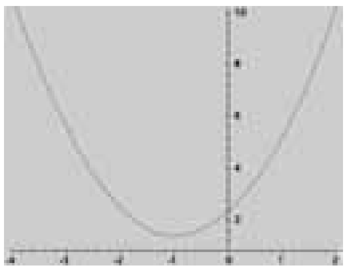
Desde el siglo XVI hasta el XVIII, uno de los problemas principales con el que se han encontrado las matemáticas ha sido el cálculo de las raíces de un polinomio.

Los babilonios ya conocían la solución de una ecuación de segundo grado, expresada de la siguiente forma: $x^2 + ax + b = 0$. Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b$ vienen dadas por la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot b}}{2}.$$

Esta solución presentaba un problema: en algunas ocasiones daba raíces sin sentido. Por ejemplo, si consideramos el polinomio $x^2 + 2x + 2 = 0$, aplicando la fórmula anterior obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}.$$



Gráfica del polinomio $x^2 + 2x + 2$

El valor $\sqrt{-1}$ carece de sentido en $\mathbb{R}$ y, por tanto, estas soluciones son imposibles. A partir de la gráfica observamos que la función no tiene ninguna raíz.

A pesar de todo, algunos matemáticos empezaron a utilizar raíces de la forma $a + b\sqrt{-1}$, muy a menudo como divertimento, sin que esta actividad tuviese ninguna utilidad. Para simplificar la notación, introdujeron el símbolo j en lugar de $\sqrt{-1}$ y lo denominaron **parte imaginaria**, ya que no existía en el mundo real. Así pues, j es tal que $j^2 = -1$.

Nota

El número imaginario j se denota en algunos libros mediante i.

Seguro que os estaréis preguntando por qué continuaron trabajando con el símbolo j. Pues bien, el único motivo era que, mediante este símbolo, eran capaces de encontrar las raíces de un polinomio de tercer o cuarto grado.

Cardano descubrió la solución de los polinomios de tercer grado. Consideramos un polinomio de tercer grado de la forma $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Para determinar sus raíces, efectuamos algunos cálculos:

$$q = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{3}, \qquad r = \frac{a_1a_2 - 3a_0}{6} - \frac{a_2^3}{27}, \qquad s_{1,2} = \sqrt[3]{r \pm \sqrt{q^3 + r^2}}.$$

Entonces, las raíces x_1, x_2 y x_3 son:

$$x_1 = s_1 + s_2 - \frac{a_2}{3}, \qquad x_{2,3} = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)j.$$

Cuando $a_2 = 0$, esta fórmula se puede escribir de una manera más compacta.

En primer lugar hacemos: $$d = \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}$$

donde $a = a_1$ y $b = a_0$

Entonces, las raíces x_1, x_2 y x_3 vienen dadas por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm d} - \frac{a}{3\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm d}}$$

Atención, a primera vista parece que aparezcan cuatro raíces, pero sólo habrá tres, ya que dos de ellas siempre están repetidas. (Recordad que un polinomio de grado n únicamente tiene n raíces.)

Ejemplo 7.1.

Aplicamos la fórmula de Cardano para el polinomio:

$$x^3 - 6x + 4 = 0.$$

Calculamos primero el discriminante, $d = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$:

$$d = \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}} = \sqrt{4-8} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2 \cdot j.$$

Las raíces vendrán dadas por $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm d} - \frac{a}{3\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm d}}$. Sustituyendo cuando tomamos los dos signos positivos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + 2j} - \frac{-6}{3\sqrt[3]{-\frac{4}{2} + 2j}} = \sqrt[3]{-2+2j} - \frac{-2}{\sqrt[3]{-2+2j}}.$$

Todavía no podemos calcular raíces cúbicas, pero observad que $(1+j)^3 = 1+3j+3j^2+j^3$, y puesto que $j^2 = -1$, obtendremos que $j^3 = -j$. Por lo tanto, $(1+j)^3 = 1+3j-3-j =$ $= -2+2j$ y de aquí, $1+j = \sqrt[3]{-2+2j}$. La raíz es:

$$\begin{aligned} x &= 1+j - \frac{-2}{1+j} = 1+j+\frac{2}{1+j}\frac{1-j}{1-j} = 1+j+\frac{2(1-j)}{1-j^2} = \\ &= 1+j+\frac{2(1-j)}{1-(-1)} = 1+j+\frac{2(1-j)}{2} = 1+j+1-j = 2. \end{aligned}$$

Podéis comprobar que $x = 2$ es una raíz de $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Así, hemos encontrado una raíz real mediante números que no tienen ningún sentido real. Esta aplicación práctica nos hace que entendamos el hecho de que algunos matemáticos mantuviesen el interés por los números complejos.

Ejercicio 7.1.

Calculad las raíces de $x^2 + 4x + 5 = 0$.

7.1. Los números complejos

A pesar de que hemos operado con los números complejos, todavía no los hemos definido, y tampoco hemos especificado cuáles son sus operaciones.

Un número complejo es una pareja de números reales (a, b) que escribiremos $z = a + bj$.

El número a recibe el nombre de **parte real** del número z.

El número b se denomina **parte imaginaria** del número z.

El conjunto de todos los números complejos lo denotamos por $\mathbb{C}$.

Dado un número complejo, $z = a + bj$, definimos la función **parte real**, $Re(z)$, como la parte real del número complejo, $Re(z) = Re(a + bj) = a$. Del mismo modo, definimos la función **parte imaginaria**, $Im(z)$, como la parte imaginaria del número complejo, $Im(z) = Im(a + bj) = b$.

Si un número complejo es de la forma $z = a + 0 \cdot j = a$, es un **número real;** si, por otra parte, el número complejo es de la forma $z = b \cdot j$, recibe el nombre de **número imaginario**.

7.2. Suma y producto de números complejos

La suma se construye sumado por separado las partes reales y las imaginarias.

La **suma** de dos números complejos $z_1 = a + bj$ y $z_2 = c + dj$ viene dada por:

$$z_1 + z_2 = (a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j.$$

Dado que estamos sumando reales, nos encontramos con que la suma de los números reales complejos tiene las mismas propiedades que la suma de los números reales.

Para el producto de números complejos pediremos que se satisfaga la propiedad distributiva, con la condición de que $j^2 = -1$.

El **producto** de dos números complejos $z_1 = a+bj$ y $z_2 = c+dj$ viene dado por:

$$z_1 + z_2 = (a+bj)\cdot(c+dj) = ac+adj+bcj+bdj^2 = (ac-bd)+(ad+bc)j.$$

Ejemplo 7.2.

Calculamos la suma y el producto de $z_1 = 1+2j$ y $z_2 = 2+3j$.

$z_1 + z_2 = (1+2j) + (2+3j) = (1+2) + (2+3)j = 3+5j.$

$z_1 \cdot z_2 = (1+2j)\cdot(2+3j) = (1\cdot 2 - 2\cdot 3) + (1\cdot 3 + 2\cdot 2)j = -4+7j.$

Ejercicio 7.2.

Calculad la suma y el producto de:

a) $z_1 = 1+2j$ y $z_2 = 2+3j$.

b) $z_1 = 1-2j$ y $z_2 = 2-j$.

c) $z_1 = -1+3j$ y $z_2 = 1+4j$.

7.3. Conjugación

En el caso de los números complejos, podemos definir una operación adicional que recibe el nombre de **conjugación**.

Si tenemos el número complejo $z = a+bj$, definimos el **conjugado** de z, $\overline{z}$ de esta forma:

$$\overline{z} = a - bj.$$

Ejemplo 7.3.

Efectuamos el cálculo de $z = 1+2j$.

Sólo tenemos que aplicar la definición $\overline{z} = 1-2j$.

Las propiedades de la conjugación son las siguientes:

1) $\overline{\overline{z}} = z$.

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Ejercicios

7.3. Calculad los conjugados de:

a) $z = 2 + 3j$.

b) $z = 1 - 2j$.

7.4. Calculad los resultados de las siguientes operaciones cuando $z_1 = 1 + j$, $z_2 = 2 + j$ y $z_3 = 1 + 2j$:

a) $z_1 + \overline{z_2 + \overline{z_3}}$.

b) $\overline{z_1 \overline{z_2}} + z_3$.

Si un número complejo z verifica:

a) $\overline{z} = z$, entonces z es un número real.

b) $\overline{z} = -z$, entonces $z = bj$; $z = bj \cdot z$ es un número imaginario.

Demostración

a) Partimos de $z = a + bj$ e imponemos que $\overline{z} = z$; entonces, $a - bj = a + bj$. Por lo tanto, puesto que $b = -b$, es necesario que $b = 0$.

b) Partimos de $z = a + bj$ e imponemos que $\overline{z} = -z$; entonces $a - bj = -a - bj$. Por tanto, puesto que $a = -a$, es necesario que $a = 0$.

Ejercicio 7.5.

Utilizando las propiedades de la conjugación, comprobad que si $p(x)$ es un polinomio real que tiene una raíz z, entonces $\overline{z}$ también es raíz de $p(x)$.

Podemos dividir dos números complejos mediante la conjugación.

Ejemplo 7.4.

Calculamos la división $\dfrac{z_1}{z_2}$ siendo $z_1 = 1 + 2j$ y $z_2 = 2 + 3j$.

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(1+2j)\cdot(2-3j)}{(2+3j)\cdot(2-3j)} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + j(1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2)}{2^2 + 3^3} = \frac{8+j}{13}.$$

Para **dividir** dos números complejos, se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Ejercicios

7.6. Calculad:

a) $\frac{j}{1+j}$. **b)** $\frac{1+2j}{2+j}$.

7.7. Calculad el número inverso de:

a) $\frac{3+j}{j}$. **b)** $\frac{2j}{2+4j}$.

7.8. Encontrad la parte real e imaginaria de $z = \left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2$ de dos formas diferentes: **a)** calculando primero la división y **b)** calculando primero el cuadrado del numerador y del denominador.

Por último, podemos definir el módulo de un número complejo:

El **módulo** de un número complejo $z = a + bj$, que acostumbra a escribirse $|z|$, es:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Algunas propiedades del módulo son:

1) $Re(z) \leq |z|$.

2) $Im(z) \leq |z|$.

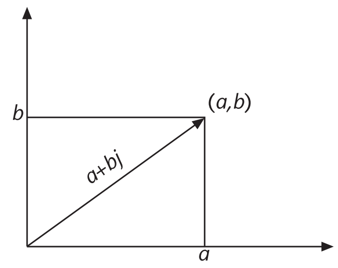
3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$.

5) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $|\lambda z| = |\lambda||z|$.

7.4. La forma polar de un número complejo

Hasta mediados del siglo XIX, los números complejos eran una herramienta matemática que se tenía que explicar. La fundamentación de los números complejos se debe, de manera independiente, a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y a William Rowan Hamilton (1805-1865), quienes propusieron la definición actual de los números complejos como una pareja de números reales (a, b) que podemos escribir $a + bj$ y que satisface ciertas propiedades.

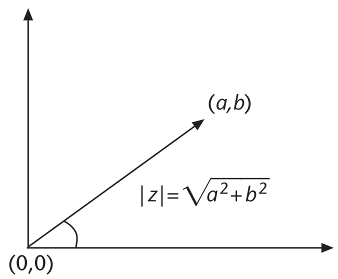


Con esta expresión tenemos que cualquier punto del plano de coordenadas se puede identificar con un número complejo.

Entonces, el módulo es la distancia del punto (a, b) al origen de coordenadas. Si interpretamos los números complejos como puntos del plano real, se pueden representar mediante la norma del vector y el ángulo respecto del eje X. Es decir, podemos escribir un número complejo $z = a + bj$ como $a = r\cos\phi$ y $b = r\sin\phi$. Sólo tenemos que escribir r y ϕ en función de a y b.

Para calcular r, elevamos al cuadrado $a = r\cos\phi$ y $b = r\sin\phi$ y los sumamos. Así:

$$a^2 + b^2 = (r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2 = r^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = r^2.$$



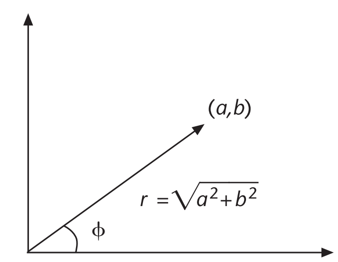
Puesto que r se refiere a un radio y es un número positivo, tenemos que el radio $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Para encontrar el valor de ϕ expresamos el cociente $\frac{b}{a}$ en función de r y ϕ; entonces:

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\phi}{r\cos\phi} = \tan\phi.$$

Por tanto, $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Si $a = 0$, entonces la división no tiene sentido. En este caso, $\phi = \frac{\pi}{2}$ si $b > 0$ y $\phi = -\frac{\pi}{2}$ si $b < 0$.



La función $\tan x$ es π-periódica, mientras que las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son 2π-periódicas. Por lo tanto, el resultado correcto sería $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ o bien $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$. Es decir, tenemos dos posibles ángulos, pero sólo uno de ellos es correcto. Si tomamos la convención de las calculadoras: $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\cos\phi \geq 0$. Por tanto, si $a \geq 0$, el valor del ángulo será $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, mientras que si $a \leq 0$, el valor del ángulo será $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$.

La **forma polar** de un número $z = a + bj$ viene dada por:

$$z = r\cos\phi + jr\sin\phi$$

donde:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ y } \phi = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \arctan\dfrac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7.5.

Calculamos la forma polar de $z = 1 + 2j$.

En primer, lugar calculamos el radio $r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, y puesto que $a = 1$ y es positiva, entonces $\phi = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = 1,107148718$.

La forma polar resulta indicada en especial para calcular el producto de dos números complejos.

Calculamos el producto $z_1 = a + bj = r_1(\cos\phi_1 + +j\sin\phi_1)$ y $z_2 = a + bj = = r_2(\cos\phi_2 + j\sin\phi_2)$. Para hacer esto, sólo necesitamos las formas trigonométricas que vemos a continuación: $\cos(\phi_1+\phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - - \sin\phi_1\sin\phi_2$ y $\sin(\phi_1+\phi_2) = \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\phi_1 + j\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2 + j\sin\phi_2) = \\ &= r_1r_2(\cos\phi_1 + j\sin\phi_1)\cdot(\cos\phi_2 + j\sin\phi_2) = \\ &= r_1r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + j(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2) = \\ &= r_1r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + j\sin(\phi_1+\phi_2)). \end{aligned}$$

El **producto** de los números complejos $z_1 = a + bj = r_1(\cos\phi_1 + j\sin\phi_1)$ y $z_2 = a + bj = r_2(\cos\phi_2 + +j\sin\phi_2)$ es:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + j\sin(\phi_1+\phi_2)).$$

Es decir, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Ejemplo 7.6.

Calculamos el producto de $z_1 = 1 + j$ y $z_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, utilizando la forma polar.

También calculamos la forma polar de z_1. El radio es $r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Puesto que el término real es positivo, entonces:

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Calculamos la forma polar de z_2. El radio es $r_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Puesto que el término real es negativo, entonces:

$$\phi_2 = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + \pi = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Y ahora, para calcular el producto, multiplicamos los radios y sumamos los argumentos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos\left(\phi_1 + \phi_2\right) + j \sin\left(\phi_1 + \phi_2\right)\right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + j \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) + j\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

7.5. La forma exponencial de un número complejo

Parece que la forma polar tiene pocas ventajas, pero es un paso intermedio para la introducción de la forma exponencial. El uso de esta formulación ha simplificado todos los problemas que tienen que ver con funciones periódicas.

Ya sabéis qué es e^x, donde x es un número real; pues bien, ahora veremos qué es e^z, donde z es un número complejo.

Para resolver este problema utilizaremos los polinomios de Taylor, así que partimos de la función $f(x) = e^x$ con x real. La serie de Taylor de e^x cuando $a = 0$ es:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Esta serie es convergente para cualquier valor de x, y para comprobarlo sólo tenemos que calcular el radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x} = \infty.$$

Por tanto, nos encontramos con que la serie es siempre convergente y que su suma es e^x.

Es razonable definir la exponencial de un número complejo de la misma manera que en el caso real:

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

Es posible tomar su parte real y la imaginaria:

$$Re\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{i!} = e^{|z|}.$$

Análogamente para la parte imaginaria. Dado que ambas series son acotadas, tenemos que son series no divergentes y, por lo tanto, podemos agrupar los términos como queramos.

La función exponencial compleja verifica:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Y si utilizamos esta propiedad tenemos:

$$e^{a+bj} = e^a e^{bj}.$$

Ya sabemos calcular la exponencial de un número real; en tal caso, ahora sólo nos quedará saber la manera de calcular la exponencial de números imaginarios puros.

$$\begin{aligned}
e^{jb} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(jb)^i}{i!} = \\
&= 1 + (jb) + \frac{(jb)^2}{2!} + \frac{(jb)^3}{3!} + \frac{(jb)^4}{4!} + \cdots = \\
&= 1 + (jb) - \frac{b^2}{2!} - j\frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \cdots = \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \cdots\right) + j\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \cdots\right) = \\
&= \cos b + j \sin b.
\end{aligned}$$

A partir de este resultado se puede demostrar una de las igualdades más sorprendentes, aquélla que relaciona elementos tan diferentes como el símbolo j, el número e y el número π. Esta igualdad recibe el nombre de **fórmula de De Moivre**.

$e^{2j\pi} = 1,$ que también se puede escribir $e^{j\pi} + 1 = 0.$

Comprobación

Partiendo de la igualdad $e^{jb} = \cos b + j \sin b$ cuando $b = 2\pi$; entonces:

$$e^{2\pi j} = \cos(2\pi) + j\sin(2\pi) = 1 + j \cdot 0 = 1.$$

La **forma exponencial** de un número complejo $z = a + bj$ es:

$$z = re^{j\phi},$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y ϕ es el **argumento** del número complejo.

La forma exponencial presenta una indeterminación, ya que si $z = re^{j\phi+2\pi kj}$ con k entero, entonces $z = re^{j\phi+2\phi kj} = re^{j\phi}e^{2\pi kj} = re^{j\phi}1^k = re^{j\phi}$. !

Dados dos números complejos z_1, z_2, entonces $z_1 = z_2$ si $r_1 = r_2$ y $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

La forma exponencial resulta especialmente ventajosa para el cálculo efectivo de potencias de números complejos.

Ejemplo 7.7.

Calculamos $(\cos x + j \sin x)^n$.

Observamos que $\cos x + j \sin x = e^{jx}$. Por tanto, $(\cos x + j \sin x)^n = \left(e^{jx}\right)^n = e^{njx} =$ $= \cos nx + j \sin nx$.

Ejemplo 7.8.

Calculamos z^{100} si $z = 1 + j$.

Expresamos z_1 en la forma exponencial:

1) Cálculo del radio: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2) Cálculo del argumento de z. Ya que $a = 1$ y es positiva, tenemos $\phi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Así,$z = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Entonces, $z^{100} = \sqrt{2}^{100}e^{100j\frac{\pi}{4}} = 2^{50}e^{25j\pi}$; para simplificar el cálculo utilizaremos la fórmula de De Moivre:

$$\begin{aligned}
z^{100} &= 2^{50}e^{2\cdot 12j\pi+j\pi} = 2^{50}e^{2\cdot 12j\pi}e^{j\pi} = \\
&= 2^{50}\left(e^{2\cdot j\pi}\right)^{12}e^{j\pi} = \\
&= 2^{50}(1)^{12}e^{j\pi} = 2^{50}(\cos\pi + j\sin\pi) = \\
&= 2^{50}(-1 + j\cdot 0) = -2^{50}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

7.9. Calculad $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{20}$.

7.10. Encontrad los números complejos tales que $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

7.11. Calculad la parte real e imaginaria de los números siguientes:

a) $e^{\frac{5\pi}{4}j}$. **b)** $2e^{\frac{\pi}{4}j} + 3e^{\frac{\pi}{6}j}$. **c)** e^{2+3j}. **d)** $e^{\frac{\pi}{4}j}e^{\frac{3\pi}{4}j}$.

7.12. Escribid en forma exponencial:

a) $\frac{e^2}{\sqrt{2}}(1-j)$. **b)** $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **c)** $5\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

7.13. Sea $z = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$. Calculad z^2 y z^4.

7.6. Los números complejos y la electricidad

En este momento es muy probable que os estéis preguntado cuál es la utilidad de los números complejos en el mundo de los números reales.

A finales de 1893 surgió su primera gran aplicación práctica, de la mano de un ingeniero de General Electric, Charles P. Steinmetz, mientras estudiaba la corriente alterna.

Si la corriente es continua (como por ejemplo, la que proporciona una pila o una batería), entonces el voltaje es constante (V). Este voltaje acelera los electrones, que crean una corriente de intensidad (I) en un medio de resistencia (R). Como es natural, estas cantidades se tienen que relacionar de alguna manera:

$$V = I \cdot R.$$

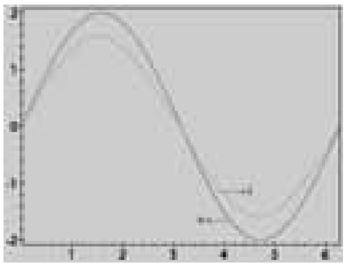
En el caso de las corrientes alternas, la relación no parecía estar tan clara, y lo podemos comprobar leyendo las propias palabras de Steinmetz:

> "El voltaje empieza en cero hasta un máximo; entonces, la función decrece hasta cero y el voltaje decrece hasta un mínimo con el mismo valor que el máximo anterior, y vuelve a crecer hasta cero. Y así, vuelve a empezar."

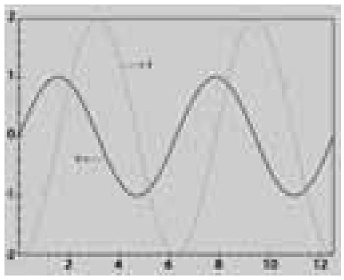
Por lo tanto, en todos los cálculos de corriente alterna, en lugar de utilizar un número real, el investigador tenía que trabajar con complicadas funciones que dependían del tiempo necesario para representar la corriente alterna. Así, la teoría de la corriente alterna era tan complicada que el investigador no pudo llegar demasiado lejos.

La idea de representar la corriente alterna mediante un número complejo fue la solución del problema de la corriente alterna. Así como la teoría de la corriente continua utiliza el álgebra de los números reales, la teoría de la corriente alterna utiliza la de los complejos.

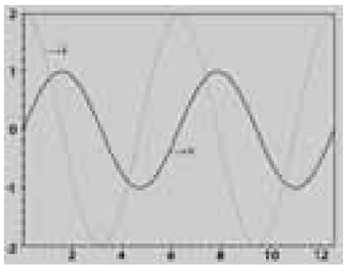
La idea de Steinmetz se basa en el siguiente hecho: supongamos que tenemos un motor que genera un voltaje oscilante; en tal caso, V se representa en notación exponencial compleja por su módulo, que es el máximo voltaje que puede generar el motor. Asociamos la intensidad (I) de la corriente alterna con un número complejo; su módulo es la máxima intensidad de la corriente y el argumento de j describe el desfase con el voltaje que sufre la corriente al circular por el circuito. Por este motivo, el voltaje y la intensidad tienen un desfase que depende del circuito.


Circuito con una resistencia

El circuito más sencillo está constituido por una resistencia (que disipa energía), una bobina (que crea un campo magnético) y un condensador (que acumula carga eléctrica). Así pues, podemos representar la resistencia mediante un número real R, la capacitancia por X_C y la impedancia de la bobina por X_L.


Circuito con una bobina

Lo que se observa en un circuito es que la resistencia no produce desfase entre el voltaje y la intensidad. Si el circuito en cuestión está constituido por un único condensador, se produce un desfase de $\frac{-\pi}{2}$ entre el voltaje y la intensidad; y si el circuito sólo tiene una bobina, se produce un avance de $\frac{\pi}{2}$.


Circuito con un condensador

Para explicar estos fenómenos se introduce una resistencia compleja:

$$R = R + (X_L - X_C)I.$$

Entonces, la descripción de la corriente alterna viene dada por la expresión:

$$V = I \cdot R.$$

Finalmente, podemos decir que el máximo voltaje es el producto entre la máxima intensidad y el número real $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.

Esto justificará el hecho de que en un circuito donde los términos entre las bobinas y los condensadores no se compensan sea necesario un mayor gasto en el voltaje, si queremos conservar la misma intensidad de corriente. Las empresas de ahorro energético utilizan este método con la intención de que la factura de corriente eléctrica disminuya.

Solucionario

1.1.
a) El término general tiene que ser tal que en los impares obtengamos 1 y en los pares -1. Por lo tanto, $x_n = (-1)^{n+1}$.

b) Observamos que $x_1 = 1$, que $x_2 = 4 = 2^2$ y que $x_3 = 3^2$. Por tanto, el término general es $x_n = n^2$.

c) Observamos que $x_1 = 1$, que $x_2 = \dfrac{1}{2}$ y que $x_3 = \dfrac{1}{3}$. Así, el término general será $x_n = \frac{1}{n}$.

d) Observamos que $x_1 = 1 = \sqrt{1}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = 2 = \sqrt{4}$ Por lo tanto, el término general es $x_n = \sqrt{n}$.

e) Suponemos que la sucesión viene dada por $x_n = \dfrac{y_n}{z_n}$; entonces, $y_n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \ldots$ Por lo tanto, $y_n = 2 \cdot n$. De manera análoga, $z_n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots$, que tiene por término general $z_n = n + 2$ y $x_n = \frac{2n}{n+2}$.

f) Observamos que $x_1 = 1$, que $x_2 = \dfrac{1}{2}$, que $x_3 = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2 \cdot 3}$, que $x_4 = \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ y, por lo tanto, el término general es $\dfrac{1}{n!}$.

1.2. Queremos demostrar que $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ es acotada. Por lo tanto, la idea será encontrar una expresión en función de n mayor que esté acotada. Entonces, $x_n = \dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{n+1}{n+1} = 1$. Por lo tanto, $x_n < 1$.

1.3. Para demostrar que $x_n = n^2$ no es acotada, tenemos que ver que para todo valor K existe un n tal que $x_n > K$. Puesto que $x_n = n^2$, tendremos que calcular cuándo $n^2 > K$, cosa que sucede cuando $n > [\sqrt{K}]$.

1.4. Observamos que los términos $x_{3n} = n + 1$ y, en consecuencia, para todo valor de K siempre hay un valor n tal que $n + 1 > K$. Así pues, x_n no es acotada.

1.5. Partimos de $x_1 = 1$ y realizamos algunas iteraciones para comprobar cómo se comporta la sucesión. $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{4}$ .... Por lo tanto, parece que la función está acotada por 1. Suponemos que $x_n < 1$ y demostramos que es cierto por inducción $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} < \dfrac{1}{2} < 1$. Así pues, x_n está acotada por 1.

1.6. Se nos pide que probemos que $x_n < x_{n+1}$. Tenemos que ver que $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$. Como lo que tenemos son términos positivos, podemos elevar al cuadrado sin que esto produzca una variación en la desigualdad. Por lo tanto, $n < n + 1$. Esta desigualdad es cierta para cualquier valor de n y, en consecuencia, $x_n = \sqrt{n}$ es decreciente.

1.7. Calculamos los primeros términos de la $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}$ y observamos que $x_{2n+1} = 0$ y $x_{2n} = \frac{1}{n}$. Por lo tanto, la sucesión no es creciente ni decreciente.

1.8. Queremos demostrar que $x_n < x_{n+1}$. Si sustituimos por el término general, tenemos:

$$\begin{aligned}
n + (n+1) + \cdots + 2n &\overset{?}{<} (n+1) + ((n+1)+1) + \cdots + 2\,(n+1) \\
n &\overset{?}{<} (2n+1) + 2\,(n+1) \\
n &\overset{?}{<} 2n + 1 + 2n + 2 \\
0 &\overset{?}{<} 3n + 3
\end{aligned}$$

Por tanto, x_n es creciente.

1.9. Observamos que si $x < 0$, entonces x_n cambia de signo en función de si n es par o impar. Esto quiere decir que la sucesión no es monótona.

Para $x = 0$, la sucesión es constante 0.

Estudiamos ahora si la sucesión es creciente para $x > 0$:

$$\begin{array}{lcl} x_{n+1} & \stackrel{?}{>} & x_n \\ x^{n+1} & \stackrel{?}{>} & x^n \\ x & \stackrel{?}{>} & 1 \end{array}$$

Dividimos por x^n y la desigualdad no cambia de signo, ya que $x > 0$.

Por lo tanto, la sucesión es monótona creciente si $x > 1$, es monótona decreciente si $x < 1$ y para $x = 1$ es monótona porque es constante e igual a 1.

1.10.
a) Podemos ver que el término general viene dado por $x_n = h(n) = \sqrt{n}$; así pues, la función sería $h(x) = \sqrt{x}$, que tiene sentido en los números reales si $x > 0$. Si calculamos la derivada tenemos $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, siempre positiva y, en consecuencia, x_n es creciente.
b) No podemos aplicar el criterio porque en la expresión aparece $(-1)^n$.
c) No podemos aplicar el criterio porque tenemos una suma que varía término a término, ya que depende de n.

1.11. Vamos a empezar por la parte más sencilla: no es monótona, y para demostrarlo, calculamos los primeros términos de la sucesión $0, 3, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{5} \ldots$. Parece que los términos pares son mayores que 1 y los impares, menores que 1. Si esta premisa fuese cierta, la sucesión no sería monótona.

Calculamos $x_{2n} = \frac{2n+(-1)^{2n}}{2n+(-1)^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1}$. Esto quiere decir que $x_{2n} > 1$.

Calculamos $x_{2n+1} = \frac{2n+1+(-1)^{2n+1}}{2n+1+(-1)^{2n+1+1}} = \frac{2n}{2n+2} = 1 - \frac{2}{2n+2}$. Esto significa que $x_{2n+1} < 1$.

Vemos que la sucesión está acotada. Los términos pares siguen la fórmula $x_{2n} = 1 + \frac{2}{2n-1}$. Puesto que $n \geq 1$, entonces $2n - 1 \geq 1$ y, en consecuencia, $\frac{2}{2n-1} \leq 2$ y $x_{2n} \leq 3$; los términos impares, la fórmula $x_{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+2} < 1$. Así pues, la sucesión está acotada por 3.

1.12. En primer lugar damos unos cuantos valores a la n: $x_n = 2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \ldots$. Parece que la sucesión es decreciente, y al ser de términos positivos, la cota inferior es 0. La cota superior es 2, ya que $x_n > x_{n+1}$ y, por lo tanto, $x_0 \geq x_n$ para todo n, como ahora comprobaremos.

Para ver que es decreciente, tenemos que demostrar que $x_{n+1} \leq x_n$. Sustituyendo por la definición de x_n tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} & \stackrel{?}{\leq} & \dfrac{2^n}{n!} \\ \dfrac{2}{n+1} & \stackrel{?}{\leq} & 1 \\ 2 & \stackrel{?}{\leq} & n+1 \\ 1 & \stackrel{?}{\leq} & n \end{array}$$

Puesto que la última desigualdad es cierta, tenemos que la sucesión es decreciente.

2.1. Partimos de:

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2^n}. \\ 2x_n & = & 2 - 2\dfrac{1}{2} + 2\dfrac{1}{4} + \cdots + 2\dfrac{(-1)^n}{2^n}. \\ 2x_n & = & 2 - 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}.} \end{array}$$

Sumamos la primera expresión con la tercera:

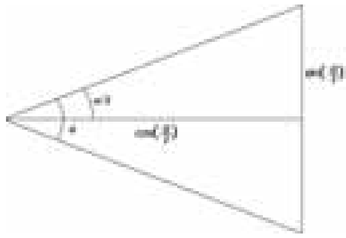
$$\begin{array}{rcl} 3x_n & = & 2 + \dfrac{(-1)^n}{2^n}. \\ x_n & = & \dfrac{2 + \dfrac{(-1)^n}{2^n}}{3}. \end{array}$$

Observamos que $\frac{(-1)^n}{2^n}$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞ , así que parece que x_n tiende a $\frac{2}{3}$.

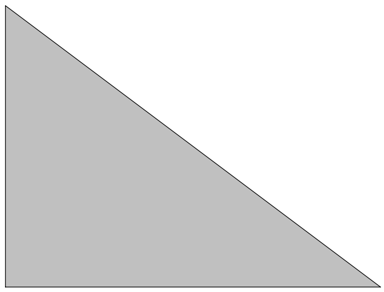
2.2. Podemos ver que, en cada paso, los triángulos se vuelven más finos. Por lo tanto, el área tiene que tender a cero. Sin embargo, si lo queremos hacer de una manera más formal, calculamos primero el área del triángulo.

El área del triángulo isósceles de lado 1 y de ángulo a viene dada por:

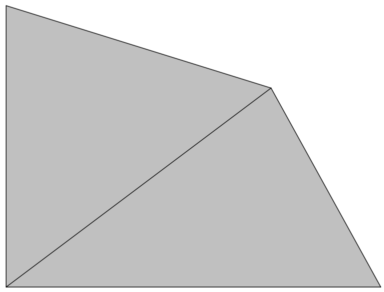
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}}{2} = \frac{\sin a}{2}\ .$$



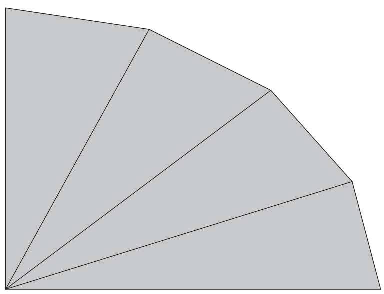
Puesto que x_n es el área de un triángulo isósceles de lado 1 y ángulo $\frac{\pi}{2^n}$, $x_n = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. La función seno tiende a 0 cuando x tiende a 0 y, por lo tanto, tenemos que x_n tiende a 0. Si queremos ver hacia dónde tiende la sucesión x_1, $2x_2$, $4x_3$ ..., representamos de manera gráfica los casos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 4$:



$n=1$



$n=2$



$n=4$

Por lo tanto, la sucesión parece comportarse de la misma manera que la sucesión de Arquímedes, pero en este caso parece tender al área de un cuarto de círculo. Así, $2^n x_n$ parece que tiende a $\frac{\pi}{2}$.

2.3. Consideramos la sucesión $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

a) Si queremos que $|x_n| < 0{,}1$, sólo tenemos que sustituir x_n por su valor, con lo cual tenemos que $\dfrac{1}{n^2} < 0{,}1$, de donde se deduce que $n > \sqrt{10} = 3{,}16\ldots$ Por lo tanto, $n \geq 4$.

b) Si queremos que $|x_n| < 0{,}1$, sólo hay que sustituir x_n por su valor. En este caso tenemos que $\dfrac{1}{n^2} < 0{,}01$, de donde se deduce que $n > \sqrt{100} = 10$. De este modo, $n \geq 11$.

c) En general, si queremos que $|x_n| < \varepsilon$ es necesario que $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, de donde se deduce que $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = 31{,}6$. Así, $N \geq \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$.

2.4. Un ejemplo de sucesión $\{x_n\}$ que sea divergente y tal que $\{|x_n|\}$ sea convergente, es la sucesión de término general $x_n = (-1)^n$.

2.5.
1) Estudiamos si la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente o decreciente. Si definimos $x^{\frac{1}{n}}$, entonces $h(y) = x^{\frac{1}{y}}$, que tiene sentido y es derivable. Si calculamos la derivada, tenemos $h'(y) = x^{\frac{1}{y}} \ln x \frac{-1}{y^2}$. Vemos que $h'(y) > 0$ si $-ln(x) > 0$ y esto es cierto si $x < 1$.
Esto significa que la sucesión es creciente si $x < 1$ y decreciente si $x > 1$.

2) Estudiamos si la sucesión $\{x_n\}$ es acotada.

a) Si $x < 1$, tenemos que ver que la sucesión está acotada superiormente. Observamos que si $x < 1$, entonces $\sqrt[n]{x} < 1$ y, de este modo, $x_n < 1$.

b) Si $x > 1$, tenemos que ver que la sucesión está acotada inferiormente. Observamos que si $x > 1$, entonces $\sqrt[n]{x} > 1$ y, en consecuencia, $x_n > 1$.

3) Estudiamos ahora la existencia del límite de $\{x_n\}$.

a) Para $x < 1$, la sucesión es creciente y acotada superiormente. Por lo tanto, tiene límite.

b) Para $x > 1$, la sucesión decreciente y es acotada inferiormente. Por lo tanto, tiene límite.

4) Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}$, que sabemos que existe y que denominaremos l: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = l$. Aplicamos que x^y es una función continua y entonces:

$$\begin{aligned} x^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} &= l \\ x^0 &= l \\ 1 &= l \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ con independencia del valor de x.

2.6.
1) Demostramos que $x_n > \sqrt{2}$. Aplicamos inducción. Es cierto para $n = 1$. Suponemos que si $n \leq k$, entonces $x_n > \sqrt{2}$. Demostrémoslo ahora para $n = k+1$.
Partimos de $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$ y queremos probar que $x_n > \sqrt{2}$. Observamos que la función que estamos estudiando es $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ y queremos averiguar cómo es su imagen. Calculamos la función $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$. Vemos que la derivada se anula para $x = \pm\sqrt{2}$, y puesto que los $x_k > 0$, entonces sólo tendremos que estudiar lo que sucede para $x = \sqrt{2}$. En este punto encontramos un mínimo; por lo tanto, $f(x) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ si $x > 2$. Así pues, por hipótesis de inducción $x_k > \sqrt{2}$, $x_{k+1} = f(x_k) > \sqrt{2}$.

2) La sucesión es decreciente y acotada inferiormente, por lo cual podemos afirmar que tiene límite.

3) Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, que sabemos que existe y, en consecuencia, lo denominaremos l. Entonces, $l = = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$. Si tenemos en cuenta que $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ es una función continua:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right) \\ l &= \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right) \\ 2l^2 &= l^2 + 2 \\ l^2 &= 2 \end{aligned}$$

Puesto que los $x_n > 0$, entonces $l = \sqrt{2}$.

2.7.
a) Estudiamos la sucesión $x_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$, y observamos que $f(x) = = \dfrac{n}{n^2+x}$ es decreciente, ya que $f'(x) = -\dfrac{n}{(n^2+x)^2} < 0$. Así:

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1} \qquad \text{si } 1 < k < n.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} n\frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} &&\leq n\frac{n}{n^2+1} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} &\leq \lim_{n\to\infty} x_n &&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \end{aligned}$$

Para encontrar los límites dividimos arriba y abajo por n^2 :

$$
\begin{array}{lclcl}
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+n}{n^2}} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \\
\dfrac{1}{1+0} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \dfrac{1}{1+0}
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b) Estudiamos la sucesión $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

Definimos $f(x) = \dfrac{x}{n^2+x}$, entonces $f'(x) = \dfrac{n^2}{(n^2+x)^2}$, que siempre es positiva y nos permite asegurar que $f(x)$ es creciente.

Por lo tanto:

$$
\begin{array}{lclcl}
n\dfrac{1}{n^2+1} & \leq & \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} & \leq & n\dfrac{n}{n^2+n} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n}
\end{array}
$$

Para encontrar los límites dividimos arriba y abajo por n^2:

$$
\begin{array}{lclcl}
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+n}{n^2}} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
\dfrac{0}{1+0} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \dfrac{1}{1+0}
\end{array}
$$

Por tanto, el criterio del bocadillo no permite decidir cuál es el valor del límite. Volvemos a aplicar el criterio, esta vez haciendo una acotación más fina. Acotamos únicamente el divisor $\dfrac{1}{n^2+k}$, que es decreciente. Entonces:

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{1}{n^2+n} + \dfrac{2}{n^2+n} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} & \leq & \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} \leq \\
 & \leq & \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+1} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+1}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} & \leq & \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} \leq \\
 & \leq & \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}.
\end{array}
$$

Aplicamos que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$:

$$
\begin{array}{lclcl}
\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} \\
\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}
\end{array}
$$

Dividiendo por n^2 arriba y abajo, tenemos:

$$
\begin{array}{lclcl}
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{2n^2+2n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{2n^2+2} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \\
\dfrac{1+0}{2+0} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n & \leq & \dfrac{1+0}{2+0}.
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

c) Para encontrar las cotas aplicaremos el hecho de que el $\sin x$ es una función acotada: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

$$\begin{array}{lcccc}
\frac{-1}{n} & \leq & \dfrac{\sin n}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \\
0 & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} & \leq & 0,
\end{array}$$

de donde tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

d) Para encontrar las cotas aplicaremos el hecho de que $\cos x$ es una función acotada: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

$$\begin{array}{lcccc}
\dfrac{-1-1-\ldots-1}{n^2} & \leq & x_n = \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2} & \leq & \dfrac{1+1+\ldots+1}{n^2} \\
\dfrac{-n}{n^2} & \leq & x_n = \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2} & \leq & \dfrac{n}{n^2} \\
\dfrac{-1}{n} & \leq & x_n = \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2} & \leq & \dfrac{1}{n} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \\
0 & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2} & \leq & 0
\end{array}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

e) Para encontrar las cotas aplicaremos el hecho de $\max \frac{x}{y} = \frac{\max x}{\min y}$ y que $\min \frac{x}{y} = \frac{\min x}{\max y}$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{lcccc}
\dfrac{n-1}{n+1} & \leq & x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+\cos n} & \leq & \dfrac{n+1}{n-1} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n+\cos n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n-1} \\
1 & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n+\cos n} & \leq & 1,
\end{array}$$

de donde tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.8.

a) El $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n$ es de la forma 1^∞; así, aplicaremos la fórmula de la exponencial. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+a}{n+b}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a-b}{n+b}\right)} = e^{a-b}.$$

b) El $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+2}$ es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, y, en consecuencia, dividimos arriba y abajo por la máxima potencia, que es n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n+2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

c) El $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+8n-1}{7n^3+6n}$ es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$; en tal caso, dividimos arriba y abajo por la máxima potencia, que es n^3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+8n-1}{7n^3+6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^3+8n-1}{n^3}}{\frac{7n^3+6n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{8}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{7+\frac{6}{n^2}} = \frac{4}{7}.$$

d) Este límite involucra $n!$ y n^n; aplicamos la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

El límite es de la forma $0 \cdot \infty$ y aplicamos el método estándar:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{2\pi x} = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \sqrt{2\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0.$$

Finalmente, podemos decir que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$.

e) Como que aparece una suma que varía con n, aplicaremos el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{5n^2} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n+1)-(1+2+\cdots+n)}{(n+1)^2-n^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+1-n^2} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{10}.$$

f) Para solucionar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$, aplicamos el criterio de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)}{\ln n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)}{n\ln n}.$$

Aplicando el método general tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi x)}{x\ln x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x + \frac{1}{2x}}{1+\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+\ln x} + \frac{1}{2x(1+\ln x)} = 1.$$

Para finalizar, podemos decir que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{\ln n^n} = 1$.

g) Aplicamos el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+(n+1)!-(1!+2!+\cdots+n!)}{(n+1)!-n!} =\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = 1.\end{aligned}$$

h) Puesto que hay sumas donde el número de términos aumenta con n, aplicamos el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+(n+1)^{n+1}-(1+2^2+\cdots+n^n)}{(n+1)^{n+1}-n^n} =\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} =\\ &= \frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Observamos que el grado del numerador del límite es n y el del denominador es $n+1$; por lo tanto, el grado total sería -1 y el límite, 0.

Más formalmente, puesto que $n+1 > n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n^{n+1}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Y puesto que $x_n > 0$, por la regla del bocadillo tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$.

Finalmente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n} = \frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} = 1.$$

i) Apliquemos la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}{n} = \lim_{n\to\infty} e^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n} =$$

$$= e^{-1}\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2\pi n} = e^{-1}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\ln(2\pi x)} = e^{-1}e^0 = e^{-1}.$$

3.1.

a) Teniendo en cuenta que $k^n >> n^r$ para todo r y para todo k con $k > 1$ y que

$$\lim_{n\to\infty} k^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \le k < 1 \end{cases}$$

resulta,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b|^n}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } |b| > 1 \\ 0 & \text{si } |b| = 1 \\ 0 & \text{si } |b| < 1 \end{cases}$$

y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n} = 0$ y, sólo si $|b| \le 1$.

En definitiva:

$$\sum \frac{b^n}{n} \begin{cases} \text{si } |b| \le 1, \text{ entonces es posible que la serie converja} \\ \text{si } |b| > 1, \text{ entonces la serie diverge} \end{cases}$$

b) Para calcular el límite del término general aplicamos que $n! >> k^n$ para todo k con $k > 1$ y, razonando como en el apartado a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b|^n}{n!} = 0, \ \ \forall b.$$

Por lo tanto, $\sum \frac{b^n}{n!}$ es posible que converja para cualquier valor de b.

c) Recordemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\sum n^p \begin{cases} \text{si } p < 0, \text{ entonces es posible que la serie converja} \\ \text{si } p \ge 0, \text{ entonces la serie diverge} \end{cases}$$

4.1.

a) Dado que tenemos un cociente de polinomios, aplicamos el criterio de Pringsheim. Puesto que el numerador tiene grado 1 y el denominador, grado 2, entonces $p = 2 - 1 = 1$.

Calculamos el $\lim_{n\to\infty} n \frac{n}{(4n-1)(4n-3)} = \frac{1}{4}$, y puesto que es finito y $p = 1$, tenemos que la serie es divergente.

b) Dado que tenemos una expresión del tipo k^n, aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{(n-1)+1}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Debido a que el límite es menor que 1, tenemos que la serie es convergente.

c) En primer lugar, eliminamos la diferencia multiplicando arriba y abajo por el conjugado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}.$$

El término general de esta sucesión no tiende a 0, sino que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \infty$. Por tanto, la serie es divergente.

d) Apliquemos el hecho de que $|\sin n| < 1$. Así, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Y esta serie es convergente, ya que es la armónica generalizada con $p = 2$. Por el criterio de comparación por diferencia tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ es convergente.

e) Apliquemos el criterio de Pringsheim. Si ponemos $p = \frac{3}{2}$, entonces el límite da infinito y, por lo tanto, tomaremos $p = \frac{5}{4}$:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{5}{4}} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{5}{4}} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} = 0,$$

donde hemos aplicado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$.

f) Apliquemos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ne^{-n^2}}{(n-1)e^{-(n-1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} e^{(n-1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-2n+1} = 0.$$

Puesto que el límite es menor que 1, la sucesión es convergente.

g) Puesto que aparecen factores del tipo $n!$ aplicaremos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n(2n-1)} = \frac{1}{4}.$$

Puesto que el límite es menor que 1, la serie es convergente.

h) Al aparecer el factor n^n, aplicaremos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[n]{n} \cdot n} = 0.$$

Y como que el límite es menor que 1, la serie es convergente.

i) Apliquemos el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+1}{3^n} = 1$ y de que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n} = 1$.

Entonces, el carácter de las dos series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ coincide. Ésta es una serie geométrica de razón $k = \frac{2}{3}$ y, por lo tanto, la serie es convergente.

j) Puesto que hay factores n^n y $n!$, aplicaremos la fórmula de Stirling.

En tal caso, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$. Aplicando el criterio del cociente o de la raíz, tenemos que $\lambda = e$ y, en consecuencia, la serie diverge.

4.2.
a) Apliquemos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^n}{(n-1)x^{n-1}} = x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = x.$$

La serie es convergente si $x < 1$ y divergente si $x > 1$. Si $x = 1$, entonces la serie es $\sum n$, que es divergente porque el término general no tiende a 0.

b) Apliquemos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

La serie es convergente siempre.

4.3.
a) Observemos que la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ es $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$, de donde deducimos que la función es siempre decreciente. Por este motivo, para acotar el error podemos aplicar el criterio de la integral.

Vemos que $S_4 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} = 1{,}177662037$. El error viene dado por la expresión que tenemos a continuación:

$$Err_4 = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{n\to\infty} \int_4^n \frac{1}{x^3} dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_4^n = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}177662037 \pm 0{,}03125$.

Si queremos saber el número de términos necesario para que Errn < 0,01, entonces aplicamos la cota de la integral:

$$Err_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n^2} < 0{,}01,$$

de donde tenemos que $n \geq \sqrt{\dfrac{1}{0{,}02}} = 7{,}071$. Esto quiere decir que $n \geq 8$.

b) Observamos que la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ es $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, de donde deducimos que la función es decreciente para $x > 0$ y, por tanto, podemos aplicar el criterio de la integral para acotar el error.

Observamos que $S_4 = \dfrac{1}{1^2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \dfrac{1}{4^2+1} = 0{,}8588235294$. El error viene dado por: $Err_4 = \displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x \Big|_4^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan 4 = 0{,}244978663$.

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0{,}9 \pm 0{,}4$.

Si queremos saber el número de términos necesario para que $Err_n < 0{,}01$, entonces aplicamos la cota de la integral:

$$Err_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan n < 0{,}01,$$

de donde tenemos que $n \geq \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 0{,}01\right) = 99{,}99666664$. Esto significa que $n \geq 100$.

c) Observamos que la derivada $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$ es $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$, de donde deducimos que la función es decreciente para $x > 0$ y, en consecuencia, podemos aplicar el criterio de la integral para acotar el error.

Observamos que $S_4 = \dfrac{1}{1^2+1} + \dfrac{1}{2^2+2} + \dfrac{1}{3^2+3} + \dfrac{1}{4^2+4} = 0{,}8$. El error viene dado por:

$$\begin{aligned} Err_4 &= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \leq \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx = \int_4^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = \ln x - \ln(x+1) \Big|_4^{\infty} = \\ &= \ln 5 - \ln 4 = 0{,}223143551. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0{,}8 \pm 0{,}3$.

Si queremos saber el número de términos necesario para que $Err_n < 0{,}01$, entonces aplicaremos la cota de la integral:

$$Err_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 0{,}01,$$

de donde tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} &< e^{0{,}01} \\ 1 + \frac{1}{n} &< e^{0{,}01} \\ n &> \frac{1}{e^{0{,}01} - 1} \\ n &> 99{,}50083417 \end{aligned}$$

Esto significa que $n \geq 100$.

4.4.
Observemos que $\frac{n}{n+1} < 1$ y, por lo tanto, $\frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{1}{2^n}$. Así pues:

$$Err_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)2^i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Si queremos $Err_n < 0{,}01$, imponemos que $\frac{1}{2^n} < 0{,}01$. De aquí deducimos que $n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} =$ $= 6{,}643856189$. Esto quiere decir que $n \geq 7$.

Así pues, $S \approx \sum_{n=1}^{7} \frac{n}{(n+1)2^n} = 0{,}6066871280 = 0{,}61.$

5.1.
a) Estudiemos la convergencia absoluta de estas series.

$\left|\frac{\sin n}{n^3}\right| = \frac{|\sin n|}{n^3} < \frac{1}{n^3}$, y puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es armónica con $p = 3$, es convergente. Dado que la serie es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ es absolutamente convergente.

b) $\left|\frac{(-1)^n + \cos 3n}{n^2+n}\right| = \frac{|(-1)^n + \cos 3n|}{n^2+n} < \frac{2}{n^2+n}$. Si aplicamos el criterio de Pringsheim para $p = 2$, deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \cos 3n}{n^2+n}$ es convergente.

c) $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ es absolutamente convergente.
d) $\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}\right| = \frac{1}{\ln(n+2)}$. Aplicando el criterio de Pringsheim con $p = 1$, se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$ es divergente. Por lo tanto, no es absolutamente convergente.

Estudiamos si podemos aplicar el criterio de Leibniz. Observamos que $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$ es decreciente, ya que $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)\ln^2(x+2)} < 0$. Y dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} = 0$, entonces tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ es convergente.

5.2.
a) Si tomamos el término general con valor absoluto, obtenemos la serie armónica con $p = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ y, por tanto, es divergente. Entonces, la serie no es absolutamente convergente.

Apliquemos el criterio de Leibniz. Si definimos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, tenemos que es decreciente. Puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es convergente.

b) Si tomamos el valor absoluto del término general obtenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$, que es convergente. Por ejemplo, si aplicamos Pringsheim con $p = 3$, entonces $\lim_{n\to\infty} n^3 \frac{1}{n^3+n} = 1$. Puesto que la serie es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+n}$ es absolutamente convergente.

c) Si tomamos el valor absoluto del término general, el resultado será la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Aplicamos el criterio del cociente y tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n-1!}} = \frac{1}{n} = 0$. Esta serie es convergente y, en consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

5.3.
a) Para ver que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{-n}}{n}$ es convergente aplicaremos el criterio de Leibniz. Observamos que $a_n = \frac{2^{-n}}{n} = \frac{1}{n2^n}$ y, por tanto, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sólo tenemos que ver que a_n es decreciente. Puesto que tenemos expresiones de la forma x^n, es conveniente que demostremos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 1.$$

Según el criterio de Leibniz, la serie es convergente.

El valor de $S_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{1}{8\cdot 3} + \frac{1}{16\cdot 4} = -0{,}4010416667$.

El error viene dado por el primer término que no sumamos y, por tanto, $|Err_4| \leq \frac{1}{5\cdot 2^5} = 0{,}625 \cdot 10^{-2}$.

Si queremos calcular para qué valor de n el error es menor que 0,001, sólo tendremos que imponer:

$$|Err_n| \leq \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} < 0{,}001.$$

Hay que resolver la inecuación $(n+1)2^{n+1} > 1.000$. Comprobad que para $n \geq 7$ el error es menor que 0,001.

b) Para ver si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{1}{n}$ es convergente, aplicaremos el criterio de Leibniz. Observamos que $a_n = \ln \frac{1}{n}$, que tiende a ∞. Por este motivo no podemos aplicar el criterio Leibniz y no podemos asegurar nada sobre la convergencia o divergencia de la serie.

6.1.
a) Ya que $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

b) Ya que $a_n = \frac{1}{n!}$, entonces $R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$.

c) Ya que $a_n = n$, entonces $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

6.2.
a) Observamos que $a_n = \frac{1}{n!}$; entonces, $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1!}{n!} = \infty$; por lo tanto, para todo valor de x, la serie es absolutamente convergente.

b) Ya que $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, entonces $R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$. Aplicamos la forma estándar $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Por lo tanto, R = 1; entonces, la serie es absolutamente convergente para $x \in (2-1, 2+1) = (1, 3)$.

c) Puesto que $a_n = n$, tenemos que $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Así, $R = 1$; en tal caso, la serie es absolutamente convergente para $x \in (-1-1, -1+1) = (-2, 0)$.

6.3.

Observemos que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Realizamos el cambio de x por $-x^2$; entonces:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando en cada lado:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{s^2+1} ds &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

6.4.

Partimos del desarrollo de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Y, haciendo el cambio de x por x^2, tendremos:

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}.$$

Observamos que esta serie es de términos positivos y no es alternada. Por lo tanto, tenemos que encontrar una fórmula para el error. En este caso calculamos el término complementario de Lagrange:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + e^{\varepsilon} \frac{x^{n+1}}{n+1!},$$

donde $\varepsilon \in (0, x)$. Puesto que $x \in (0, 1)$, tenemos que $\varepsilon \in (0, 1)$. Además, e^x es creciente, así que nos encontramos con que $e^{\varepsilon} \leq e$. En consecuencia:

$$e^x \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + e \frac{x^{n+1}}{n+1!}.$$

Cambiando x por x^2, tenemos:

$$e^{x^2} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{i!} + e \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Integrando entre 0 y 1 tenemos:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(2i+1)} + e \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Por tanto, si queremos un error menor que 0,001 tenemos que imponer $\frac{e}{(n+1)!(2n+3)} < 0{,}001$. Dando valores a la n, obtenemos que $n \geq 5$.

7.1. Para calcular las soluciones de $x^2 + 4x + 5 = 0$, utilizaremos la fórmula que proporciona las raíces de un polinomio de segundo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2j}{2} = -2 \pm j.$$

7.2.

a) Si $z_1 = 1+2j$ y $z_2 = 2+3j$, entonces $z_1+z_2 = (1+2j)+(2+3j) = (1+2)+(2+3)j = 3+5j$ y el producto es $z_1 \cdot z_2 = (1+2j) \cdot (2+3j) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) + j(1 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = -4 + 7j$.

b) Si $z_1 = 1-2j$ y $z_2 = 2-j$, entonces $z_1+z_2 = (1-2j)+(2-j) = (1+2)+(-2-1)j = 3-3j$ y el producto es $z_1 \cdot z_2 = (1-2j) \cdot (2-j) = (1 \cdot 2-(-2) \cdot (-1))+j(1 \cdot (-1)+(-2) \cdot 2) = 0-5j = -5j$.

c) Si $z_1 = -1+3j$ y $z_2 = 1+4j$, entonces $z_1+z_2 = (-1+3j)+(1+4j) = (-1+1)+(3+4)j = 7j$ y el producto es $z_1 \cdot z_2 = (-1+3j)\cdot(1+4j) = ((-1)\cdot 1 - 3\cdot 4) + j((-1)\cdot 4 + 3\cdot 1) = -13 - j$.

7.3.
a) $\overline{z} = 2 - 3j$.

b) $\overline{z} = 1 + 2j$.

7.4.
a) Utilizamos las propiedades del conjugado para simplificar los cálculos; entonces $z = z_1 + \overline{z_2 + \overline{z_3}} = z_1 + \overline{z_2} + \overline{\overline{z_3}} = z_1 + \overline{z_2} + z_3$. Si sustituimos z_1, z_2, z_3 por los valores correspondientes tenemos: $z = (1+j) + \overline{(2+j)} + (1+2j) = (1+j)+(2-j)+(1+2j) = (1+2+1)+(1-1+2)j = 4+2j$.

b) Simplificamos primero la expresión; entonces $z = \overline{z_1 \overline{z_2}} + z_3 = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} + z_3 = \overline{z_1} z_2 + z_3$. Y si ahora sustituimos z_1, z_2, z_3 por los valores correspondientes, tenemos: $z = \overline{(1+j)}(2+j) + (1+2j) = (1-j)(2+j) + (1+2j) = (1\cdot 2 - (-1)\cdot 1) + j(1\cdot 1 + (-1)\cdot 2) + (1+2j) = (3-j) + (1+2j) = (4+j)$.

7.5. Un polinomio de grado n se escribe $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Sea z la raíz; entonces, $0 = p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Calculamos $p(\overline{z}) = a_0 + a_1 \overline{z} + \cdots + a_n \overline{z}^n$; puesto que los a_i son reales, entonces $a_i = \overline{a_i}$. Por tanto, $p(\overline{z}) = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_n z}^n = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = 0$.

7.6.
a) $z = \frac{j}{1+j} = \frac{j}{1+j}\frac{1-j}{1-j} = \frac{j-j^2}{1+1} = \frac{1+j}{2}$.

b) $z = \frac{1+2j}{2+j} = \frac{1+2j}{2+j}\frac{2-j}{2-j} = \frac{2-j+4j-2j^2}{2^2+1^2} = \frac{4+3j}{5}$.

7.7.
a Si $z = \frac{3+j}{j}$, entonces $\frac{1}{z} = \frac{j}{3+j} = \frac{j}{3+j}\frac{3-j}{3-j} = \frac{3j-j^2}{3^2+1^2} = \frac{1+3j}{10}$.

b) Si $z = \frac{2j}{2+4j}$, entonces $\frac{1}{z} = \frac{2+4j}{2j} = \frac{2}{2j} + \frac{4j}{2j} = \frac{1}{j} + 2 = \frac{1}{j}\frac{-j}{-j} + 2 = -j + 2$.

7.8.
Queremos calcular $z = \left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2$.

a) En primer lugar calculamos la división. Sea $z_1 = \frac{1+j}{1-j} = \frac{1+j}{1-j}\frac{1+j}{1+j} = \frac{1+j+j+j^2}{1+1} = \frac{1+j+j-1}{1+1} = j$. Dado que $z = z_1^2$, tenemos que $z = j^2 = -1$.

b) Calculamos primero los cuadrados del numerador y del denominador: $z = \left(\frac{1+j}{1-j}\right)^2 = \frac{1+2j+j^2}{1-2j+j^2} = \frac{1+2j-1}{1-2j-1} = \frac{2j}{-2j} = -1$.

7.9. Escribimos el número $z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en forma exponencial. Por lo tanto, $z = e^{j\frac{\pi}{12}}$; en tal caso, $z^{20} = e^{20j\frac{\pi}{12}} = e^{5j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.10. Escribimos el número z en forma exponencial; así, $z = re^{j\phi}$. Si sustituimos $\overline{z} = \frac{1}{z}$, el resultado es $\overline{re^{j\phi}} = \frac{1}{re^{j\phi}}$. De este modo, $re^{-j\phi} = \frac{1}{r}e^{-j\phi}$. Igualamos los módulos y los argumentos: los argumentos son iguales siempre y, si los módulos son iguales sólo si, $r = \frac{1}{r}$ o, lo que es lo mismo, $r^2 = 1$, de donde tenemos que $r = 1$ y $r = -1$. Sin embargo, el módulo es positivo, lo cual hace que $r = -1$ no tenga sentido.

7.11.
a) A partir de la fórmula del exponencial tenemos:

$$e^{\frac{5\pi}{4}j} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j.$$

b) La suma es más fácil de calcular en su forma cartesiana: $2e^{\frac{\pi}{4}j} + 3e^{\frac{\pi}{6}j} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)j$.

c) Mediante el uso de las propiedades de la función exponencial obtenemos $e^{2+3j} = e^2 \cdot e^{3j} = e^2(\cos 3 + j\sin 3)$.

d) Utilizando las propiedades de la exponencial:

$$e^{\frac{\pi}{4}j}e^{\frac{3\pi}{4}j} = e^{\frac{\pi}{4}j + \frac{3\pi}{4}j} = e^{\pi j} = \cos\pi + j\sin\pi = -1 + 0\cdot j = -1.$$

7.12.
a) Sea $z = \frac{e^2}{\sqrt{2}}(1-j)$. Para escribirlo en forma exponencial, calculamos primero el módulo y después el argumento: $r = \sqrt{\left(\frac{e^2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{e^2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{e^4} = e^2$ Puesto que la parte real es positiva, entonces $\phi = \arctan\left(\frac{-\frac{e^2}{\sqrt{2}}}{\frac{e^2}{\sqrt{2}}}\right) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, $z = e^2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = = e^{2-j\frac{\pi}{4}}$.

b) Sólo tenemos que recordar cómo se relacionan la forma polar y la exponencial:

$$3\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

c) Escribimos los dos números en forma exponencial: $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5e^{\frac{\pi}{6}}$ y $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5e^{\frac{\pi}{2}}$.

Por lo tanto, $z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot e^{\frac{\pi}{6}} \cdot 5 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} = 25e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{25}{2} + j\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

7.13. Empezamos por escribir el número complejo en forma exponencial. Para hacerlo, calculamos el módulo y después el argumento:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Al ser positiva la parte real positiva, $\phi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. De esta manera, tenemos que $z = e^{j\frac{\pi}{4}}$. Y ahora ya podemos calcular las potencias z^2 y z^4: $z^2 = e^{2j\frac{\pi}{4}} = = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j = j$. $z^4 = e^{4j\frac{\pi}{4}} = e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1 + 0 \cdot j = -1$

Glosario

Conjugado de un número complejo: número complejo con la parte imaginaria cambiada de signo.

Límite de una sucesión x_n: valor al que tienden los términos de una sucesión. De manera formal, el límite de una sucesión es x si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que $|x_n - x| < \epsilon$ si $n > N$.

Número complejo: pareja de números reales *a* (parte real), *b* (parte imaginaria) que escribiremos como $z = a + bj$.

Radio de convergencia: es el $\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ y se denota mediante R.

Serie: pareja formada por las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{S_n\}$, donde a_n es el término general de una sucesión y s_n es el término general de la sucesión de sumas parciales. Se presenta mediante el símbolo $\sum a_n$.

Serie absolutamente convergente: serie tal que la serie del término general con valor absoluto es convergente.

Serie alternada: serie de término general $(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$ para cualquier valor de n.

Serie de potencias: serie de término general $a_n(x-a)^n$.

Serie geométrica de razón k: serie de término general k^n.

Serie armónica generalizada: serie de término general $\frac{1}{n^p}$.

Sucesión convergente: existe el límite de la sucesión y además es finito.

Sucesión de números reales: aplicación h de los número naturales N, en el conjunto R de los números reales: $h(n) = x_n$.

Sucesión divergente: sucesión no convergente.

Sucesión acotada: existe un número real K tal que todos los términos de la sucesión se encuentran en el intervalo $(-K, K)$.

Sumario

A lo largo de este módulo se han introducido las sucesiones de números reales que necesitábamos para definir el concepto de serie o suma de los términos infinitos de una sucesión. Tanto en un caso como en el otro, hemos presentado aquellos criterios que nos iban a facilitar el estudio de su convergencia y, en el caso pertinente, el valor del límite. Para finalizar, se han definido las series de potencias a partir de los polinomios de Taylor y se han establecido sus propiedades básicas.

El último apartado consiste en una breve introducción a los números complejos.

Bibliografía

Apostol, T.M. (1990). *Calculus*. Barcelona: Reverté.

Ortega, J. (1990). *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.