# 18.- Sistemas de masa variable. El problema de 2-cuerpos.



El contenido y enfoque de la lección precedente tuvo un carácter fundamental, teórico, abstracto, sin apenas concesiones a los aspectos prácticos. Por eso, consideramos necesario completarla con esta otra, en la que plantearemos unos problemas de índole práctica, con escasa relación entre sí, pero que constituyen el complemento natural y necesario de la lección anterior.

**§18.1. Sistemas de masa variable.-** En la Lección 17 hemos enunciado los teoremas y leyes generales que gobiernan la evolución de los sistemas materiales. Son numerosísimos los problemas físicos que pueden resolverse utilizando adecuadamente los teoremas y leyes de conservación de la cantidad de movimiento, del momento angular y de la energía. Al decir adecuadamente, queremos significar que dichos teoremas y leyes deben utilizarse en el contexto preciso en que fueron enunciados. Así, las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y del momento angular, y los teoremas correspondientes de los que se deducen, pueden aplicarse a cualquier sistema físico, con tal que se tengan en cuenta todas las fuerzas y momentos externos que actúan sobre él. La ley de conservación de la energía mecánica (cinética + potencial) sólo será utilizable cuando todas las fuerzas sean conservativas, de modo que no haya conversión de energía mecánica a otro tipo de energía, a menos que podamos valorar el montante de dicha conservación.

En todo caso, destacaremos que los teoremas y leyes de conservación se refieren a sistemas materiales bien definidos y al utilizarlos hemos de tener sumo cuidado en precisar que es lo que se incluye en el sistema al cual se aplican. Recordemos que uno de los supuestos de partida en el desarrollo de la lección anterior (§17.1) fue que el sistema de partículas considerado debería ser un *sistema cerrado*, esto es, que no intercambiaría masa con el exterior (sistema de masa constante), aunque si podría intercambiar cantidad de movimiento, momento angular y energía con su ambiente (sistema no-aislado).

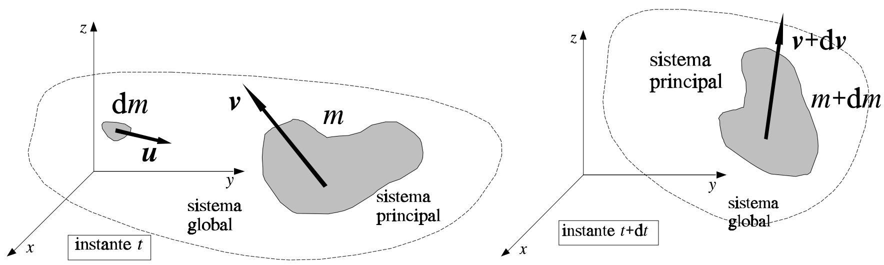



Figura 18.1

Hasta ahora nos hemos ocupado solamente de sistemas cerrados, en los que la masa del sistema permanecía constante en el transcurso del tiempo. En este artículo trataremos con *sistemas abiertos*, que intercambian masa con el exterior, de modo que su masa variará en el transcurso del tiempo. Así, por ejemplo, cuando una gota de agua cae en la atmósfera, va recogiendo moléculas de vapor de agua atmosférico en su caída, de modo que su tamaño y masa (considerada la gota como el sistema) va aumentando. Otro ejemplo de sistema de masa variable lo constituye un cohete, cuya masa va disminuyendo a medida que se va quemando el combustible.

Para estudiar en general tales sistemas de masa variable, consideraremos un sistema, de masa instantánea $m$, cuyo centro de masa se está moviendo en ese instante $t$ con una velocidad $\boldsymbol{v}$ en un cierto referencial inercial, y que se encuentra sometido a una fuerza resultante externa $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, no representada en la Figura 18.1a. Un cierto instante posterior, $t + \mathrm{d}t$, la configuración del sistema habrá cambiado, por haber sido alcanzado dicho sistema por una masa elemental $\mathrm{d}m$ que se movía inicialmente con una velocidad $\boldsymbol{u}$, medida también en el mismo referencial inercial.

Nuestro propósito primordial es establecer la forma que tomará la segunda ley del movimiento para el sistema de masa $m$, siendo $m$ variable en el transcurso del tiempo. Podemos analizar la situación considerando el sistema global $m + \mathrm{d}m$, que es un sistema de masa constante al que podemos aplicar sin ambages los resultados obtenidos hasta ahora. Puesto que el sistema global ($m + \mathrm{d}m$) es de masa constante, podemos asegurar que para él es

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p} \qquad [18.1]$$

o sea que la impulsión elemental producida por la resultante de las fuerzas externas al sistema durante el intervalo de tiempo elemental $\mathrm{d}t$ es igual al cambio elemental de la cantidad de movimiento del mismo. Podemos escribir

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}}\mathrm{d}t = (m + \mathrm{d}m)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) - (m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m) = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m - \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m \qquad [18.2]$$

donde hemos despreciado el infinitésimo de segundo orden $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$. La expresión anterior podemos reescribirla en la forma

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad [18.3]$$

o sea
$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{u}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad [18.4]$$

que no es sino la expresión de la segunda ley de Newton, que define la fuerza externa que actúa sobre un sistema material cuya masa no permanece constante en el transcurso del tiempo, por estar recibiendo un aporte de masa y, por supuesto, de cantidad de movimiento desde el exterior.

Debemos reparar en que las ecuaciones anteriores, [18.3] y [18.4], se reducen a los casos familiares

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \qquad [18.5]$$

respectivamente, siempre que el sistema que estemos considerando tenga masa constante; esto es, siempre que no intercambie masa con el exterior ([18.5a]), o incluso cuando intercambiándola sea $\boldsymbol{u} = 0$ ([18.5b]).

También deberemos observar que no es posible obtener las expresiones [18.3] y [18.4] a partir de la [18.5b], considerando la masa variable al efectuar la derivación. En efecto, de [18.5b] se sigue

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad [18.6]$$

que tan sólo es un caso particular de las expresiones [18.3] y [18.4], correspondiente a la situación en que $\boldsymbol{u} = 0$, esto es, cuando la masa que se incorpora o sale del sistema se encuentra en reposo en el referencial inercial que hayamos elegido.

Para estudiar el movimiento de un sistema abierto (de masa variable) hemos tenido que recurrir a incluir la masa elemental d$m$ que se aporta (o que se desprende) al sistema en un sistema global de masa constante. Esto ha sido necesario porque la expresión $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ sólo puede utilizarse para sistemas cerrados, aun cuando en ellos exista intercambio de masa entre sus diversas partes. Sin embargo, en muchos problemas, como en los referentes al movimiento de los cohetes, estaremos interesados estrictamente en el estudio del movimiento de una de las partes del sistema. Entonces será conveniente definir como *sistema principal* esa parte cuyo movimiento nos interesa, aun cuando su masa varíe con el tiempo. En esas condiciones, será más interesante reescribir la expresión [18.3] en la forma

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \qquad [18.7]$$

que posee una interpretación física más evidente. El primer término del primer miembro representa el ritmo con que la fuerza externa (el medio ambiente) está suministrando cantidad de movimiento al sistema de masa $m$ (variable); el segundo término representa el ritmo con que se está transfiriendo cantidad de movimiento al sistema principal, de masa $m$ (variable), por la masa que se le incorpora o que sale del mismo. Este segundo término deberá interpretarse como la fuerza "ejercida" sobre el sistema principal por la masa que se la incorpora o sale de él. En el caso de un cohete, este término recibe el nombre de *empuje*; en general lo llamaremos *fuerza de reacción* y lo designaremos por $\boldsymbol{F}_{\mathrm{reac}}$; *i.e.*,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{reac}} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{18.8}$$

La suma de *esas dos fuerzas* es la fuerza total que actúa sobre el sistema principal, que será igual al producto de la masa $m$ (variable) del mismo por la aceleración de su centro de masa; *i.e.*,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{reac}} = m\boldsymbol{a} \tag{18.9}$$

como si se tratase de un sistema cerrado (*i.e.*, de masa constante).

La cantidad $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ es la velocidad relativa de la masa que se incorpora o sale del sistema principal respecto a este mismo sistema; esto es

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{18.10}$$

de modo que las expresiones [18.7] y [18.8] suelen escribirse como

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{18.11}$$

y

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{reac}} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{18.12}$$

**§18.2. Fundamentos de la propulsión de los cohetes.-** A todos nos resulta familiar el movimiento de un cohete, bien sea un simple cohete verbenero o un cohete encargado de poner en órbita un satélite artificial; en todo caso, el cohete es impulsado hacia delante por el chorro de gases que expulsa hacia atrás.

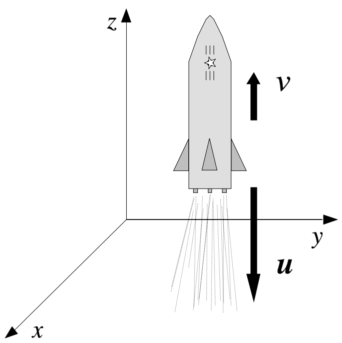


Figura 18.2

Un *motor cohete* (o de propulsión a chorro, como popularmente se le llama), consiste esencialmente en una cámara de combustión, donde se quema un combustible sólido o líquido, que dispone de unas aberturas y toberas dispuestas en la forma adecuada para dirigir los gases procedentes de dicha combustión en la dirección deseada. El sistema cohete + combustible (+ comburente, naturalmente) puede considerarse como un sistema global de masa constante. Cuando se inicia la combustión, los gases salen expelidos a gran velocidad, o sea, con una cierta cantidad de movimiento "hacia atrás"; en consecuencia, en virtud del principio de la conservación de la cantidad de movimiento, el cohete adquiere una cantidad de movimiento igual "hacia adelante". Esto es, el cohete es propulsado hacia adelante por la expulsión hacia atrás de una parte de su masa. Si nos interesamos solamente por el movimiento del cohete, estamos ante un problema en que varía (disminuyendo) la masa del sistema principal.

Naturalmente, la energía necesaria para acelerar los gases resultantes de la combustión, y en definitiva para acelerar el cohete, precede de la energía liberada en dicha combustión. Cuando se inicia la ignición del combustible, y mientras que el cohete se mueve lentamente respecto a la Tierra, el motor del cohete resulta ser muy poco eficaz, pues casi toda la energía liberada en la combustión se emplea en comunicar energía cinética (acelerar) a los gases expelidos, que adquieren una gran velocidad respecto a Tierra. Pero conforme el cohete va aumentando su velocidad, los gases de salida, que son expelidos con una velocidad constante respecto al cohete, tendrán cada vez menos velocidad respecto a Tierra. Cuando la velocidad del cohete con respecto a Tierra llega a ser igual (en módulo) a la velocidad de los gases respecto al cohete, entonces los gases, al abandonar el cohete (o mejor, cuando el cohete los abandona a ellos), no tienen velocidad respecto a Tierra, de modo que su energía cinética es nula (en el referencial de Tierra). En estas condiciones, toda la energía liberada en la combustión se aprovecha (salvo pérdidas) para aumentar la energía cinética del cohete. Es fácil comprender la conveniencia de un "empujón" inicial para un aprovechamiento óptimo del combustible.

Al estudiar el movimiento del cohete debemos tener en cuenta que éste es un sistema de masa variable, ya que su masa va disminuyendo a medida que se quema el combustible. En un referencial inercial, la ecuación diferencial del movimiento del cohete se escribe en la forma [18.7]; esto es

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \qquad [18.13]$$

donde $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ es la resultante de las fuerzas externas (fuerzas gravitatorias, resistencia del aire, ...) que actúan sobre el cohete, $m$ es la masa del cohete más la del combustible que contiene en un instante dado y $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son, respectivamente, las velocidades del cohete y de los gases expelidos respecto a un mismo referencial inercial. La diferencia de velocidades ($\boldsymbol{u}$ - $\boldsymbol{v}$) representa, obviamente, la velocidad de salida de los gases respecto al cohete, esto es, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}$, de modo que podemos escribir, una vez más

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} + \boldsymbol{u}_{\mathbf{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \qquad [18.14]$$

donde el término $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ representa el "empuje" proporcionado por el motor cohete;

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{emp}} = \boldsymbol{u}_{\mathbf{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad [18.15]$$

Puesto que $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ es negativo (por representar una pérdida de masa por unidad de tiempo) el "empuje" tiene dirección opuesta a $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}$.

Si para el instante inicial $t$=0 es $m = m_0$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$, por integración de la ec. dif. del movimiento [18.14] obtendremos la velocidad del cohete en función del tiempo. Suponiendo $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}$ = cte, tenemos:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}_{\mathbf{rel}}\ln\frac{m}{m_0} + \int_0^t \frac{\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}}}{m}\,\mathrm{d}t \qquad [18.16]$$

Consideremos el caso de un lanzamiento vertical ascendente, desde la superficie terrestre, despreciemos la resistencia que presenta el aire al movimiento del cohete, así como el movimiento de rotación de la Tierra, y supongamos constante el valor de la intensidad del campo gravitatorio (*i.e.*, $g$=cte, lo que equivale a considerar tan sólo lanzamientos hasta poca altura). En las condiciones anteriormente expuestas, la fuerza externa que obra sobre el cohete es su propio peso, $\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = m\boldsymbol{g}$, y la expresión anterior se reduce a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}_{\text{rel}} \ln\frac{m}{m_0} + \boldsymbol{g}t \qquad [18.17]$$

y, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{u}_{\text{rel}}$ y $\boldsymbol{g}$ están dirigidos hacia abajo, escribiremos

$$v = v_0 + u_{\text{rel}} \ln\frac{m_0}{m} - gt \qquad [18.18]$$

Si el combustible se quema a ritmo constante $\alpha = -\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$,

$$m = m_0 - \alpha t \qquad [18.19]$$

será la masa del cohete al cabo de un tiempo $t$; en estas condiciones, la velocidad del cohete será función exclusivamente del tiempo y vendrá dada por

$$v = v_0 + u_{\text{rel}} \ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} - gt \qquad [18.20]$$

Supongamos, además, que una fracción $f$ (<1) de la masa inicial del cohete corresponda al combustible. La masa final del cohete, una vez agotado el combustible, será $m_{\text{f}} = (1 - f)\, m_0$ y el tiempo empleado en quemar todo el combustible será $t_{\text{f}} = fm_0/\alpha$, resultando que la velocidad final del cohete será

$$v_{\text{final}} = v_0 + u_{\text{rel}} \ln\frac{1}{1-f} - \frac{fm_0}{\alpha} g \qquad [18.21]$$

de modo que la velocidad final del cohete será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad de expulsión de los gases respecto al cohete.

Si el cohete se mueve en el espacio libre, fuera de la acción gravitatoria (*i.e.*, $g$=0), será nulo el último término de [18.21]; en estas condiciones, la velocidad final del cohete depende solamente de la velocidad de escape de los gases y de la fracción de la masa original del cohete que corresponde al combustible, con independencia del ritmo a que sea quemado el combustible. Evidentemente, si el ritmo de expulsión de masa es muy lento, el tiempo necesario para alcanzar la velocidad final será muy largo.

La integración de la expresión [18.20] nos permite expresar la posición del cohete en función del tiempo:

$$z = z_0 + (v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2) + u_{\text{rel}} \left( t + \frac{m_0 - \alpha t}{\alpha} \ln\frac{m_0 - \alpha t}{m_0} \right) \qquad [18.22]$$

como el lector comprobará fácilmente, donde $z_0$ representa la posición inicial del cohete (para $t$ = 0).

**§18.3. El problema de dos cuerpos.-** En una lección anterior (Lec. 12) hemos estudiado el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central, insistiendo, por su espacial interés, en el caso de fuerzas centrales inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Se asumía, entonces, que el objeto responsable de la fuerza que actuaba sobre la partícula en movimiento era suficientemente másico como para considerarlo como un *centro de fuerzas fijo*. De esta forma idealizábamos el problema general, el de la *interacción mutua* entre dos partículas, reduciéndolo al del movimiento de una sola partícula en un campo de fuerzas estacionario. Sin embargo, podemos conseguir que la solución que obtuvimos entonces corresponda al problema general de interacción mutua entre dos partículas de masas similares, de modo que ambas partículas se encuentren realmente en movimiento y no podamos referirnos a ninguna de ellas como a un centro de fuerzas inmóvil. Bastará para ello introducir algunas pequeñas correcciones a las soluciones que obtuvimos en la Lección 12.

Consideraremos en este artículo el movimiento de un sistema de dos partículas bajo la acción de fuerzas internas al sistema (fuerzas de interacción entre las dos partículas) que satisfagan la tercera ley de Newton (al menos en su forma débil) y a ninguna fuerza externa al sistema o a fuerzas externas que satisfagan unas condiciones bastante restrictivas que especificaremos más adelante. El método que vamos a utilizar nos permitirán separar el problema en dos problemas independientes, referentes cada uno de ellos al movimiento de una sola partícula, lo que constituye una notable simplificación.

Sean dos partículas, de masas respectivas $m_1$ y $m_2$, sobre las que actúan fuerzas exteriores $\boldsymbol{F}_{1,\mathrm{ext}}$ y $\boldsymbol{F}_{2,\mathrm{ext}}$ e internas $\boldsymbol{F}_{12}$ y $\boldsymbol{F}_{21}$ ejercidas por cada partícula sobre la otra y que satisfagan la tercera ley de Newton (en su forma débil, al menos)

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \qquad [18.23]$$

Las ecuaciones del movimiento de las dos partículas, en un referencial inercial único, son

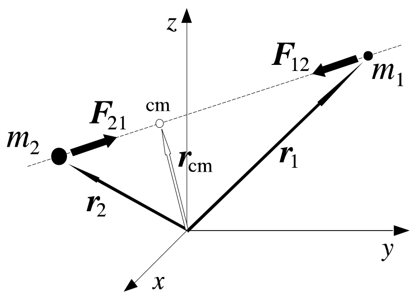



Figura 18.3

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{1,\mathrm{ext}} \qquad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{2,\mathrm{ext}} \qquad [18.24]$$

que son dos ec. dif. ligadas, ya que $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$. En consecuencia, resulta conveniente introducir nuevas variables en lugar de $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \qquad [18.25]$$

donde $\boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}}$ es el vector de posición del centro de masa del sistema de dos partículas y $\boldsymbol{r}_{12}$ es el vector de posición *relativo* de $m_1$ respecto a $m_2$. Sumando miembro a miembro las expresiones [18.24], y teniendo en cuenta [18.23] y [18.25a], se obtiene

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{cm}} = \boldsymbol{F}_{\mathbf{1,ext}} + \boldsymbol{F}_{\mathbf{2,ext}} \qquad [18.26]$$

que es la ecuación del movimiento del centro de masa del sistema.

Multiplicando las expresiones [18.24] por $m_2$ y $m_1$, respectivamente, restando miembro a miembro las expresiones resultantes y teniendo en cuenta [18.23] y [18.25b], se obtiene finalmente

$$m_1 m_2\,\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{12}} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{F}_{\mathbf{12}} + m_1 m_2\left(\frac{\boldsymbol{F}_{\mathbf{1,ext}}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}_{\mathbf{2,ext}}}{m_2}\right) \qquad [18.27]$$

Supongamos ahora que las fuerzas externas son tales que

$$\frac{\boldsymbol{F}_{\mathbf{1,ext}}}{m_1} = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathbf{2,ext}}}{m_2} \qquad [18.28]$$

y adoptemos la notación siguiente

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} = \boldsymbol{F}_{\mathbf{1,ext}} + \boldsymbol{F}_{\mathbf{2,ext}} \qquad M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad [18.29]$$

Entonces, las expresiones [18.26] y [18.27] pueden reescribirse en la forma que corresponde a la ecuación del movimiento de una sola partícula

$$M\,\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{cm}} = \boldsymbol{F}_{\mathbf{ext}} \qquad \mu\,\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{12}} = \boldsymbol{F}_{\mathbf{12}} \qquad [18.30]$$

Estas dos ecuaciones están ahora completamente separadas, a diferencia de lo que ocurría con las ecuaciones [18.24] que estaban ligadas (recuérdese que la fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ depende solamente de la posición relativa entre las partículas 1 y 2, *i.e.*, de $\boldsymbol{r}_{12}$).

La ec. dif. [18.30a] es la del movimiento del centro de masa del sistema (de dos o de muchas partículas); en ausencia de fuerzas externas, dicho centro de masa se moverá con velocidad constante ($\boldsymbol{v}_{\text{cm}}$ = cte).

La ec. dif. [18.30b] es la del movimiento de una sola partícula de masa $\mu$ moviéndose bajo la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1. La masa $\mu$ recibe el nombre de *masa reducida*, en atención a que es menor que cada una de las masas $m_1$ y $m_2$. Así pues, el movimiento de la partícula 1 visto desde la partícula 2 (movimiento relativo) es como si la partícula 2 fuese un centro de fuerzas fijo y la partícula 1 tuviese una masa igual a la masa reducida del sistema.

Recordemos que la ec. dif. [18.30b] es aplicable en ausencia de fuerzas exteriores o cuando existiendo éstas resultan ser proporcionales a las masas de las partículas, como exige la expresión [18.28]. Esta segunda condición se cumple cuando las fuerzas externas son de naturaleza gravitatoria, ejercidas por masas que disten de las dos partículas mucho más que estas entre sí. Así, por ejemplo, en el sistema de dos cuerpos Tierra-Luna, la distancia entre éstos (384 403 km) es mucho menor que la que los separan del Sol ($149.57 \times 10^6$ km) y de los otros planetas. En cambio, en el caso de partículas cargadas eléctricamente, las fuerzas externas de naturaleza electromagnética (que suelen predominar sobre las de naturaleza gravitatoria) no son proporcionales a la masa, sino a la carga eléctrica de las partículas, y por ello no será aplicable la ecuación [18.30b] cuando existan fuerzas externas relacionadas con la carga de las partículas.

En general, y dentro de las condiciones de validez de la expresión [18.30b], podemos enunciar que

> el movimiento relativo entre las dos partículas es equivalente al movimiento de una sola partícula, cuya masa es la masa reducida del sistema, moviéndose respecto de la otra partícula como si de un centro de fuerzas fijo se tratara.

Por supuesto que ninguna de las dos partículas está fija; si acaso lo estará el centro de masa del sistema, cuando no actúen fuerzas externas, eligiendo convenientemente el referencial inercial.

¿Qué uso podemos hacer de las ec. [18.30]? Evidentemente, si podemos resolver las ecuaciones [18.30], que son independientes entre sí, también podremos resolver el problema de las dos partículas. Cuando hayamos encontrado $\boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}}$ y $\boldsymbol{r}_{12}$ en función del tiempo, esto es, cuando conozcamos el movimiento del centro de masa y el movimiento relativo de la partícula 1 respecto a la 2, podremos obtener las posiciones de las partículas, $\boldsymbol{r}_1(t)$ y $\boldsymbol{r}_2(t)$, resolviendo el sistema de ecuaciones [18.25]; se obtiene

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}} + \dfrac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r}_{12} \\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}} - \dfrac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r}_{12} \end{cases} \qquad [18.31]$$

---

**Ejemplo I.-** Dos partículas, de masas $m_1$ y $m_2$, respectivamente, están inicialmente en reposo separadas por una distancia $D$, sometidas tan sólo a su acción gravitatoria mutua. Calcular el tiempo que transcurrirá hasta que colisionen.

Las ec. dif. del movimiento son

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_{\mathrm{cm}} = F_{\mathrm{ext}} \qquad \mu\ddot{x}_{12} = F_{12}$$

con $\quad F_{\mathrm{ext}} = 0 \qquad F_{12} = -G\dfrac{m_1m_2}{x_{12}^2}$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

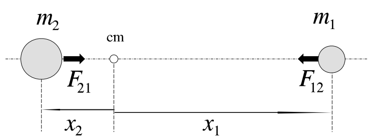


Figura 18.4

por consiguiente, el centro de masas del sistema permanece estacionario y lo tomaremos como origen de las coordenadas $x_1$ y $x_2$ de las partículas.

La aceleración relativa será

$$a_{12} = \ddot{x}_{12} = \frac{F_{12}}{\mu} = -G\frac{m_1m_2}{\mu x_{12}^2} = -G\frac{m_1+m_2}{x_{12}^2} = v_{12}\frac{\mathrm{d}v_{12}}{\mathrm{d}x_{12}}$$

de donde

$$\int_0^{v_{12}} v_{12}\,\mathrm{d}v_{12} = \frac{1}{2}v_{12}^2 = -G(m_1+m_2)\int_D^{x_{12}} \frac{\mathrm{d}x_{12}}{x_{12}^2} = G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{x_{12}} - \frac{1}{D}\right)$$

o sea

$$v_{12} = \sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{x_{12}} - \frac{1}{D}\right)} = \frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}t}$$

Integrando de nuevo

$$t_\mathrm{f} = \int_0^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2G(m_1+m_2)}}\int_D^0 \frac{\mathrm{d}x_{12}}{\sqrt{\frac{1}{x_{12}} - \frac{1}{D}}}$$

y con el cambio de variable

$$x_{12} = D\,\mathrm{sen}^2\theta \qquad \mathrm{d}x_{12} = 2D\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

obtenemos finalmente el tiempo pedido:

$$t_\mathrm{f} = \frac{2D^{3/2}}{\sqrt{2G(m_1+m_2)}}\int_{\pi/2}^0 \mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2D^{3/2}}{\sqrt{2G(m_1+m_2)}}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right]_{\pi/2}^0 = \frac{\pi D^{3/2}}{2\sqrt{2G(m_1+m_2)}}$$

**§18.4. Masa reducida.-** La masa reducida de un sistema de dos partículas ha quedado definida por [18.29c], lo que equivale a la *media armónica* de las dos masas; *i.e.*,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad [18.32]$$

La masa reducida, como su nombre indica, tiene un valor menor que $m_1$ y $m_2$, siendo la menor de ambas masa la que tiende a predominar en el valor de $\mu$. En el caso en que ambas partículas tengan la misma masa, $m_1 = m_2 = m$, la masa reducida es

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2} \qquad [18.33]$$

esto es, la mitad de la masa de cada una de ellas.

En el caso en que una de las partículas tenga una masa mucho menor que la otra, por ejemplo $m_1 \ll m_2$, será

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \approx m_1 \qquad [18.34]$$

donde hemos utilizado la aproximación $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, cuando $\varepsilon \ll 1$.

Así pues, cuando una de las partículas es mucho más ligera que la otra, la masa reducida es aproximadamente igual (algo menor) a la masa de la más ligera. Por ejemplo, en el sistema de dos partículas protón-electrón (átomo de hidrógeno) es

$$\mu \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right) = m_e \left(1 - \frac{1}{1836}\right) = 0.9995\, m_e \qquad [18.35]$$

Como caso más extremo todavía, al discutir el movimiento de un satélite artificial alrededor de la Tierra podemos utilizar, con muy buena aproximación, la masa del satélite artificial en lugar de la masa reducida del sistema Tierra-satélite; esto equivale, naturalmente, a considerar el centro de la Tierra como un centro de fuerzas fijo.

Consideraremos como último ejemplo el del átomo de *positronio*. El positronio es un "átomo" semejante al de hidrógeno, en el que en lugar de haber un protón hay un positrón. El positrón es una partícula elemental que tiene la misma masa que el electrón, pero con una carga eléctrica positiva, $e^+$. La interacción coulombiana entre el positrón y el electrón en el átomo de positronio es igual a la existente entre el protón y el electrón en el átomo de hidrógeno. La masa reducida del sistema ($e^+e^-$) es $m_e/2$, en tanto que la del sistema ($pe^-$) es $\mu \approx m_e$. Este resultado sugiere que pueda existir una correspondencia entre las líneas espectrales (niveles de energía) de los átomos de hidrógeno y de positronio. Dicha suposición es correcta, como se ilustra en la Figura 18.5, en la que se muestran los niveles energéticos para ambos átomos. Así, el nivel fundamental del hidrógeno corresponde a -13.6 eV, en tanto que el del positronio es -6.8 eV.

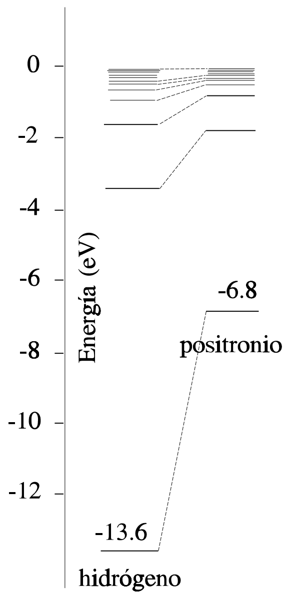



Figura 18.5

**§18.5. Momento angular y energía cinética.-** La separación entre el movimiento del centro de masa y el movimiento relativo puede extenderse a las expresiones del momento angular y de la energía cinética del sistema de dos partículas, haciendo aparecer la masa reducida del sistema. A partir de las expresiones [18.31], por derivación respecto al tiempo, encontraremos la relación existente entre la velocidad de cada partícula (en un referencial dado), la velocidad del centro de masa $\boldsymbol{v}_{cm}$ (en ese mismo referencial) y la velocidad relativa $\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{cm} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_{cm} + \dfrac{\mu}{m_1}\boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{cm} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_{cm} - \dfrac{\mu}{m_2}\boldsymbol{v}_{12} \end{cases} \qquad [18.36]$$

Sustituyendo [18.31] y [18.36] en las expresiones del momento angular y de la energía cinética del sistema en el referencial dado, esto es,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r_1} \times m_1\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{r_2} \times m_2\boldsymbol{v_2} \qquad E_k = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{18.37}$$

se obtiene finalmente, después de algunas operaciones,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_{\mathbf{cm}} \times M\, \boldsymbol{v}_{\mathbf{cm}} + \boldsymbol{r}_{\mathbf{12}} \times \mu\, \boldsymbol{v}_{\mathbf{12}} \tag{18.38}$$

$$E_{\rm k} = \tfrac{1}{2} M\, v_{\rm cm}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\, v_{12}^2 \tag{18.39}$$

de modo que tanto el momento angular como la energía cinética del sistema pueden separarse en dos partes: una parte asociada con el movimiento del centro de masa y otra parte asociada con el movimiento relativo entre las dos partículas. Los términos $\boldsymbol{r}_{\rm cm}\times M\boldsymbol{v}_{\rm cm}$ y $Mv^2_{\rm cm}/2$ representan, respectivamente, el momento angular y la energía cinética orbitales o externos, ya definidos en la lección anterior. Los términos $\boldsymbol{r}_{12}\times\mu\boldsymbol{v}_{12}$ y $\mu\boldsymbol{v}^2_{12}/2$ se corresponde con el momento angular y la energía cinética intrínseca o internos, esto es, medidos en el referencial del centro de masa. Obsérvese que el momento angular intrínseco es el mismo que el de una sola partícula de masa $\mu$, velocidad $\boldsymbol{v}_{12}$ y vector de posición $\boldsymbol{r}_{12}$; en su expresión tan sólo aparecen las magnitudes que describen el movimiento relativo entre las partículas. Análogas consideraciones podemos hacer para la energía cinética interna del sistema de dos partículas.

Los resultados anteriores deben tenerse en cuenta al calcular, por ejemplo, el momento angular y la energía interna del átomo de hidrógeno. Deberemos utilizar la distancia $\boldsymbol{r}_{\rm ep}$ y la velocidad $\boldsymbol{v}_{\rm ep}$ del electrón relativas al protón, así como la masa reducida $\mu_{\rm ep}$ del sistema protón-electrón. De ese modo, tendremos

$$\boldsymbol{L}_{\mathbf{int}} = \boldsymbol{r}_{\mathbf{ep}} \times \mu_{\rm ep}\boldsymbol{v}_{\mathbf{ep}} \qquad E_{\rm int} = \frac{1}{2}\mu_{\rm ep}\boldsymbol{v}_{\mathbf{ep}}^2 - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0 r_{\rm ep}} \tag{18.40}$$

donde el término $-e^2/4\pi\varepsilon_0 r_{\rm ep}$ corresponde a la energía potencial interna (electrostática) del sistema electrón-protón.

La cantidad de movimiento total del sistema de dos partículas es

$$\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2} = M\boldsymbol{v}_{\mathbf{cm}} \tag{18.41}$$

y en su expresión no aparecen ni $\mu$ ni $\boldsymbol{v}_{12}$.

Puede resultar interesante calcular la cantidad de movimiento de cada una de las partículas en el SCM. Los vectores de posición ($\boldsymbol{r}_1'$ y $\boldsymbol{r}_2'$) y las velocidades ($\boldsymbol{v}_1'$ y $\boldsymbol{v}_2'$) de las partículas respecto al centro de masa vienen dados por

$$\begin{cases} \boldsymbol{r_1}' = \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{cm}} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}} = \dfrac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}} \\ \boldsymbol{r_2}' = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r}_{\mathbf{cm}} = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}} = -\dfrac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r}_{\mathbf{12}} \end{cases} \tag{18.42}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{\mathbf{cm}} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_{12} = \dfrac{\mu}{m_1}\boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_{\mathbf{cm}} = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_{12} = -\dfrac{\mu}{m_2}\boldsymbol{v}_{12} \end{cases} \qquad [18.43]$$

por lo tanto, las partículas se mueven en direcciones opuestas en el SCM y las cantidades de movimiento de cada partícula en el SCM son

$$\boldsymbol{p}_1' = m_1\boldsymbol{v}_1' = \mu\boldsymbol{v}_{12} \qquad \boldsymbol{p}_2' = m_2\boldsymbol{v}_2' = -\mu\boldsymbol{v}_{12} \qquad [18.44]$$

de modo que las partículas se mueven en el SCM con cantidades de movimiento iguales y opuestas; *i.e.*, la cantidad de movimiento total en el SCM es nula.

**§18.6. Oscilaciones de dos cuerpos.-** En la Lección 13 (§13.7) hemos estudiado las oscilaciones de una masa $m$ unida a uno de los extremos de un muelle de constante elástica $k$, unido por su otro extremo a una pared. Naturalmente la pared está unida rígidamente a la Tierra, de modo que el sistema es, en realidad, un sistema de dos cuerpos unidos mediante un muelle, en el que uno de los cuerpos (la Tierra) tiene una masa efectiva infinita. Esta es la razón por la que se puede analizar el movimiento como si de un sólo cuerpo (la masa $m$) se tratase.

Sin embargo, nos encontramos a menudo con sistemas oscilantes de dos cuerpos de masas comparables, de modo que no podemos considerar uno de ellos como de masa infinita. Esta situación se presenta, por ejemplo, en las moléculas diatómicas, tales como el $O_2$, el CO, el ClH, ..., en las que los átomos que las constituyen pueden oscilar a lo largo de la recta que los une. El acoplamiento entre los átomos de la molécula es de naturaleza electromagnética; sin embargo, podemos imaginar, al menos en una primera aproximación (cuando es muy pequeña la amplitud de las oscilaciones), que el acoplamiento obedezca la ley de Hooke, como si los átomos estuviesen conectados mediante pequeños muelles ideales sin masa.

Nos proponemos resolver, como paradigma de las oscilaciones de dos cuerpos, el problema de las oscilaciones de dos partículas, de masa respectivas $m_1$ y $m_2$, conectadas mediante un muelle ideal (extensor-compresor y sin masa), de constante de fuerza $k$, alineado a lo largo del eje $x$. Los extremos del muelle se localizan mediante las correspondientes coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, como se muestra en la Figura 18.6a, de modo que la longitud del muelle en un instante dado $t$ es $x_{12} = x_1 - x_2$. Si es $l_0$ la longitud natural del muelle (sin deformar), la deformación del mismo en un instante dado, *i.e.*,

$$(x_1 - x_2) - l_0 = x_{12} - l_0 \qquad [18.45]$$

será positiva o negativa según que el muelle esté estirado o comprimido.

En la Figura 18.6b representaremos el sistema oscilante en un instante genérico, en que el muelle está estirado; las fuerzas que actúan sobre las masas $m_1$ y $m_2$ son

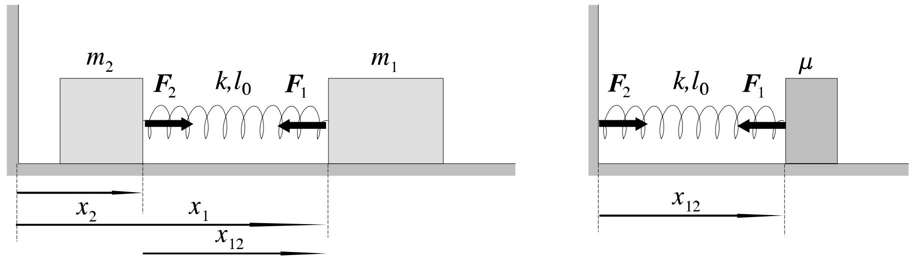



Figura 18.6

$$F_1 = -k(x_1 - x_2 - l_0) = -k(x_{12} - l_0)$$
$$F_2 = +k(x_1 - x_2 - l_0) = +k(x_{12} - l_0) \qquad [18.46]$$

*i.e.*, iguales en módulo, pero en sentidos opuestos (tercera ley de Newton).

Aunque podemos plantear el problema de las oscilaciones de dos cuerpos recurriendo a la formulación general (leyes del movimiento), preferimos hacer uso directo de los conceptos y expresiones desarrollados en esta lección, separando el movimiento del centro de masas y el movimiento relativo. Así, las ecuaciones diferenciales [18.30] se escriben en la forma

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_{\mathrm{cm}} = 0 \qquad\qquad \mu\ddot{x}_{12} = F_1 \qquad [18.47]$$

ya que $F_{\mathrm{ext}}$=0 , donde $\mu$ es la masa reducida del sistema de dos cuerpos y $F_1$ viene dado por [18.46]

La primera ec. dif. de [18.47] nos conduce inmediatamente a que $\ddot{x}_{\mathrm{cm}}$=0, de modo que $\dot{x}_{\mathrm{cm}}$=cte (=0), por lo que el centro de masas, si estaba en reposo, permanecerá en reposo.

La segunda ec. dif. de [18.47], en la que sustituimos [18.46], se escribe en la forma

$$\mu\ddot{x}_{12} = -k(x_{12} - l_0) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_{12} + \frac{k}{\mu}x_{12} = \frac{k}{\mu}l_0 \qquad [18.48]$$

que representa un m.a.s. cuya frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \qquad [18.49]$$

resultando que el sistema oscilante de dos cuerpos tiene la misma frecuencia y periodo que el constituido por un solo cuerpo de masa $\mu$, conectado mediante un muelle semejante a una pared fija, como se ilustra en la Figura 18.6b. Dicho de otro modo, en el sistema de dos cuerpos, una de las partículas se mueve respecto a la otra (movimiento relativo) como si esta segunda estuviese fija y la primera tuviese una masa igual a la masa reducida $\mu$.

El movimiento relativo está definido por la función

$$x_{12} = l_0 + A_{12}\,\mathrm{sen}(\omega t + \psi) \qquad [18.50]$$

como el lector puede comprobar fácilmente. Los parámetros $A_{12}$ y $\psi$, que representan respectivamente la amplitud y la fase inicial de las *oscilaciones relativas* se evalúan a partir de las condiciones iniciales.

**Ejemplo II.-** Supongamos que separamos los dos bloques de la Figura 18.6 de modo que el muelle experimente un alargamiento que sea una fracción $f$ de su longitud natural y que, a continuación, los abandonamos partiendo del reposo. Determinar el movimiento de cada uno de los dos bloques.

Las *condiciones iniciales*, esto es, para $t$=0, son:

$$x_{12}(0) = l_0 + f\,l_0 = (1+f)\,l_0 \qquad \dot{x}_{12}(0) = 0 \qquad [18.51]$$

Entonces, derivando la expresión [18.50] respecto del tiempo, obtenemos

$$\begin{cases} x_{12} = l_0 + A_{12}\,\mathrm{sen}(\omega t + \psi) \\ \dot{x}_{12} = \omega A_{12} \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \qquad [18.52]$$

y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, será

$$\begin{cases} l_0 + A_{12}\,\mathrm{sen}\,\psi = l_0 + f\,l_0 & \Rightarrow \quad A_{12}\,\mathrm{sen}\,\psi = f\,l_0 & \Rightarrow \quad A_{12} = \pm f\,l_0 \\ \omega A_{12} \cos\psi = 0 & \Rightarrow \quad \psi = \pm\dfrac{\pi}{2} & \ldots\ldots\ldots \nearrow \end{cases} \qquad [18.53]$$

de modo que, en cualquier caso, es

$$x_{12} = l_0 + f\,l_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) = l_0 + f\,l_0 \cos\omega t \qquad [18.54]$$

o sea, un movimiento (relativo) armónico simple de amplitud $A_{12}$=$fl_0$.

Puesto que el centro de masas permanece estacionario, referiremos el movimiento de cada uno de los dos cuerpos al centro de masas. Obtenemos las coordenadas $x_1'(t)$ y $x_2'(t)$, a partir de [18.42], con $x_{\mathrm{cm}}$=0; *i.e.*,

$$\begin{cases} x_1' = +\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,x_{12} = +\left(\dfrac{m_2\,l_0}{m_1+m_2} + \dfrac{m_2 f l_0}{m_1+m_2}\cos\omega t\right) \\[2ex] x_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,x_{12} = -\left(\dfrac{m_1\,l_0}{m_1+m_2} + \dfrac{m_1 f l_0}{m_1+m_2}\cos\omega t\right) \end{cases} \qquad [18.55]$$

de modo que los dos cuerpos oscilan en *contrafase*, con amplitudes

$$A_1 = \frac{m_2 f l_0}{m_1+m_2} \qquad A_2 = \frac{m_1 f l_0}{m_1+m_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad [18.56]$$

*i.e.*, inversamente proporcionales a las masas respectivas.

**§18.7. Movimiento en el Sistema Solar.-** En el borrador de *de Motu*, escrito por Isaac NEWTON, probablemente a finales de 1684, se discute el movimiento planetario a través de la fuerza centrípeta dirigida hacia uno de los focos de una elipse, siguiendo el método que le había sugerido Robert HOOKE. En dicho borrador se concluye con el siguiente escolio:

> "Por consiguiente, los planetas mayores giran en elipses que tienen un foco en el centro del Sol, y los radios trazados desde el Sol describen áreas proporcionales a los tiempos, enteramente como lo describió Kepler ..."

Sin embargo, Newton no continuó creyendo en estas afirmaciones durante mucho tiempo, pues pronto comprendió que no eran estrictamente correctas. Newton comprendió bien pronto que tan sólo había probado que la ley de las órbitas elípticas y la ley de las áreas se debían satisfacer para una masa puntual que se mueve en un campo de fuerzas centrales, atraída hacia un centro de fuerza fijo; esto es, para un sistema de un cuerpo. Pero tuvo que reconocer que el sistema de un cuerpo no corresponde a la situación física real, sino que tan sólo representa una simplificación artificial que se introduce en el problema real porque así es más fácil de analizar matemáticamente.

El *sistema de un cuerpo* representa a la Tierra como una masa puntual y al Sol como a un centro de atracción inmóvil. Pero Newton sabía que si el Sol atrae a la Tierra, ésta debe atraer al Sol con una fuerza de igual magnitud. En estas condiciones, la Tierra no puede desplazarse en una órbita elíptica simple, alrededor del Sol; más bien, tanto el uno como la otra deberán moverse alrededor del centro de masa del sistema Sol-Tierra. El problema es evidentemente el de un sistema de dos cuerpos.

Considerando el sistema Sol-Tierra como un sistema de dos cuerpos que se mueven bajo su atracción gravitatoria mutua, la ecuación del movimiento relativo deberá escribirse en la forma

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{m_\mathrm{S}m_\mathrm{T}}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -G\frac{\mu(m_\mathrm{S}+m_\mathrm{T})}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad [18.57]$$

donde $m_\mathrm{S}$, $m_\mathrm{T}$ y $\mu$ representan, respectivamente, la masa del Sol, la masa de la Tierra y la masa reducida del sistema Sol-Tierra, $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición relativo (de la Tierra respecto al Sol) y $\boldsymbol{e}_r$ es el versor correspondiente. La ecuación anterior es idéntica a la ecuación del movimiento de una partícula de masa $\mu$ que se mueve alrededor de una masa inmóvil $m_\mathrm{S} + m_\mathrm{T}$. Estamos pues en condiciones de introducir las correcciones que habíamos anunciado al final del artículo §12.11, cuando estudiábamos el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, para tener en cuenta que en las situaciones físicas reales, en las que intervienen al menos dos cuerpos, ninguno de los dos cuerpos estará realmente inmóvil. Así, por ejemplo, la tercera ley de Kepler para órbitas elípticas deberá escribirse en la forma

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{a^3}{m_\mathrm{S}+m_\mathrm{T}} \qquad [18.58]$$

donde $a$ representa el semieje mayor de la *órbita relativa*. Esta expresión nos viene a decir que la tercera ley de Kepler, tal como se enunció en §12.11, no es exactamente correcta, sino tan sólo aproximada; en efecto, el periodo orbital depende no sólo del semieje mayor sino también de la masa del planeta en cuestión. No obstante, dada la gran disparidad de masas entre la del Sol y la de los planetas, el error que se introduce al tomar $m_S+m_T \approx m_S$ es muy pequeño. En el caso del sistema Sol-Tierra, el error relativo sería $\Delta T/T$ = 0.000 0015, lo que nos daría un periodo (anual) de unos 47 s más largo.

En el Sistema Solar tan sólo existe un sistema de dos cuerpos ligados en el que la masa del más ligero representa una fracción apreciable de la masa del sistema; ese sistema es el sistema Tierra-Luna. Dadas las masas de la Tierra ($m_T = 5.979 \times 10^{24}$ kg) y de la Luna ($m_L = 7.354 \times 10^{22}$ kg), el periodo de la órbita lunar ($T$ = 655.708 h = 27.32 días) y el semieje mayor de la órbita lunar (relativa a la Tierra, $a_{LT} = 3.84403 \times 10^5$ km) podemos hacer algunos cálculos interesantes. Así, si calculásemos el periodo de la órbita lunar, a partir de [18.58], con $m_T + m_L \approx m_T$, cometeríamos un error relativo $\Delta T/T$ = 0.006 131 = 0.6131 %, que es considerable, y obtendríamos un periodo de más de 4 horas más largo que el verdadero.

En el referencial del centro de masa del sistema Tierra-Luna, tanto la Luna como la Tierra se mueven en órbitas elípticas alrededor del centro de masa del sistema; las expresiones [18.42] nos permiten calcular los correspondientes semiejes mayores.

$$a_T = \frac{m_L}{m_T + m_L} a_{LT} = 4\,671 \text{ km} \qquad a_L = \frac{m_T}{m_T + m_L} a_{LT} = 379\,732 \text{ km} \qquad [18.59]$$

De modo que la Tierra se mueve alrededor del centro de masa del sistema, situado a unos 1700 km por debajo de la superficie terrestre, sobre la línea que une los centros de la Tierra y de la Luna. Se presenta, por lo tanto, una pequeña oscilación en la dirección aparente del Sol, visto desde la Tierra, como se ilustra en la Figura 18.7 (que no está a escala). Puesto que el semieje mayor de la órbita terrestre en torno al Sol es $a = 149.57 \times 10^6$ km, la amplitud angular de dicha oscilación viene a ser $\beta \approx a_T/a = 3.12 \times 10^{-5}$ rad = 6.4″. Este efecto proporciona uno de los métodos para calcular la masa de la Luna.

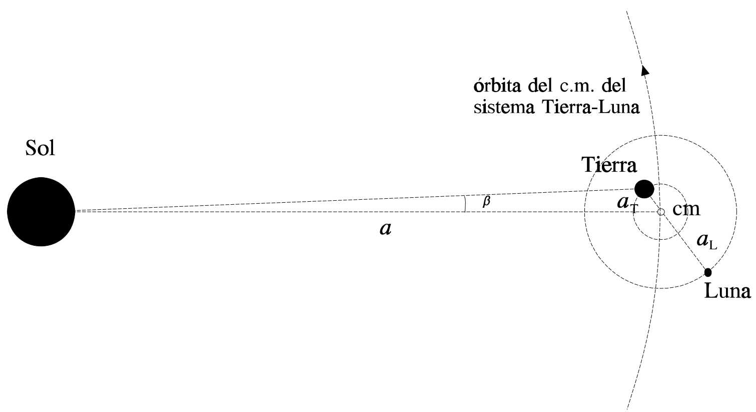



Figura 18.7

El sistema de dos cuerpos Tierra-Luna se encuentra en el campo gravitatorio solar, de modo que actúan fuerzas externas sobre el mismo. Dadas las dimensiones del sistema Tierra-Luna el campo gravitatorio solar puede considerarse uniforme, y se satisface la relación [18.28]. En consecuencia, en el referencial en que el Sol está en reposo, el centro de masa del sistema Tierra-Luna se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol y este movimiento se superpone al de los dos cuerpos alrededor de su centro de masa. En la aproximación que estamos considerando, ambos tipos de movimiento, descritos respectivamente por [18.30a] y [18.30b] están completamente separados, y no puede haber transferencia de momento angular o de energía de uno a otro. Sin embargo, se presentarán pequeños efectos debidos a la falta de uniformidad del campo gravitatorio solar y a la presencia de los demás planetas. Estas pequeñas desviaciones reciben el nombre genérico de *perturbaciones*.

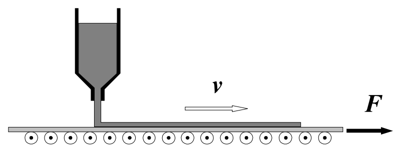
# *Problemas*

**18.1.-** Un vagón de carga, abierto por su parte superior, pesa 10 t y se mueve libremente, sin rozamientos apreciables, sobre una vía recta a nivel. Comienza a llover intensamente, cayendo la lluvia verticalmente sobre el terreno. El vagón está vacío inicialmente y se mueve con una velocidad de 3.6 km/h. ¿Cuál será la velocidad del vagón después de haber recorrido lo suficiente como para recoger una tonelada de agua? ¿Qué suposiciones ha debido Vd. hacer para llegar a ese resultado?

**18.2.-** Se coloca un recipiente sobre el plato de una balanza de resorte y se ajusta ésta para que marque cero cuando el recipiente está vacío. Entonces se vierte agua dentro del recipiente, en chorro continuo, a razón de 100 $cm^3$ por minuto, desde una altura de 1 m. **a)** Expresar la lectura de la balanza en función del tiempo desde el instante en que empezamos a verter agua. **b)** ¿Cuánto marcará la balanza cuando se hayan recogido 500 $cm^3$ de agua?

**18.3.-** Un fusil ametrallador dispara balas de 50 g con una velocidad de 1200 m/s. Calcular el ritmo máximo de disparo para que la fuerza media de retroceso no supere los 300 N.

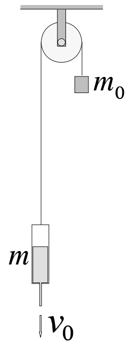
**18.4.-** Un hombre, que junto con su rifle pesa 70 kg, lleva patines y dispara su rifle en dirección horizontal. Cada proyectil tiene una masa de 30 g y sale con una velocidad de 800 m/s. Supónganse despreciables los rozamientos. **a)** ¿Cuál será la velocidad del hombre después de efectuar 10 disparos? **b)** Supongamos que los diez disparos se hayan realizado en 10 s, ¿cuál es el valor de la fuerza media que se ha ejercido sobre el hombre?




Prob. 18.5

**18.5.- Cinta transportadora.** Desde una tolva estacionaria cae continuamente material sobre una cinta transportadora, a un ritmo constante $\alpha = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$. Antes de la caída del material, la cinta se movía con una velocidad constante $v$. **a)** ¿Qué fuerza adicional se requiere para que la cinta continúe moviéndose con la misma velocidad $v$? **b)** Calcular la potencia adicional que debe suministrar el motor que arrastra a la cinta. **c)** Demostrar que la potencia necesaria para mantener la cinta en movimiento es el doble del ritmo con que aumenta la energía cinética del sistema. ¿Qué ha sido de la mitad sobrante de la potencia suministrada?

**18.6.-** Los dos bloques de la figura tienen inicialmente la misma masa $m_0$ y se encuentran en reposo. El bloque de la izquierda es un recipiente que contiene una cantidad de agua igual al 90% de su masa inicial. En el instante $t$=0, dicho recipiente comienza a expulsar agua por su base inferior, con una velocidad constante $v_0$ relativa al recipiente, con un flujo constante igual a $\alpha$ (masa/tiempo). **(a)** Demostrar que, para que la cuerda esté siempre tensa, deberá ser $\alpha v_0 \leq 0.2 m_0 g$. **(b)** En el supuesto de que se cumpla la relación anterior, calcular la velocidad final del sistema en el instante en que se haya expulsado todo el agua.




Prob. 18.6

**18.7.-** Dos largas barcazas se mueven paralelamente entre sí y en la misma dirección sobre la superficie de un lago de aguas tranquilas, con velocidades respectivas de 14.4 km/h y 18 km/h. cuando están pasando la una junto a la otra, se palea carbón desde la más lenta a la más rápida, a un ritmo de 800 kg/min, en dirección transversal a las barcazas. Suponiendo que las fuerzas de fricción entre las barcazas y el agua no dependan del peso de éstas, ¿qué potencia adicional deberán suministrar los motores de cada barcaza para mantener constantes las velocidades?

**18.8.-** Una partícula de masa $m_0$ se mueve a lo largo del eje $x$, en la dirección positiva de dicho eje, con una velocidad $v_0$. Cuando alcanza la posición $x = 0$ penetra en un medio material, del que va incorporando masa en proporción a la distancia recorrida en dicho medio. **a)** Expresar la posición, masa y velocidad de la partícula en función del tiempo. **b)** Expresar la disipación de energía en función del tiempo y del espacio recorrido. Explicar dicha disipación de energía.

**18.9.-** Una gota de agua de lluvia tiene una masa inicial $m_0$ y cae partiendo del reposo. Durante su caída, el vapor de agua atmosférico va condensándose sobre la gota, a un ritmo constante de $\alpha$ unidades de masa por unidad de tiempo. Despreciando la resistencia del aire, expresar la distancia de caída de la gota en función del tiempo.

**18.10.-** En 1905, Einstein llegó a la conclusión de que la masa ponderable "tangible" de una partícula, cargada o no, se incrementa con su velocidad de acuerdo con la expresión

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

donde $m_0$ es la llamada *masa en reposo*, y $m$ es la llamada *masa relativista*, esto es, la masa de la partícula cuando se mueve con una velocidad $v$ respecto del observador y $c$ es la velocidad de la luz.

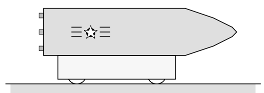
Consideremos una partícula sobre la que actúa una fuerza $F$ (constante o no ) en la misma dirección que su velocidad. **a)** A partir de la expresión relativista de $F = \mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t$, demostrar que

$$F\,\mathrm{d}s = mv\,\mathrm{d}v + v^2\,\mathrm{d}m$$

donde d$s$ es un desplazamiento elemental. **b)** Demostrar que el trabajo realizado por dicha fuerza puede expresarse en la forma

$$W = \int F\,ds = (m - m_0)\,c^2$$

e interpretar este resultado.



Prob. 18.11

**18.11.-** Un cohete está montado horizontalmente sobre una vagoneta experimental. Supongamos que la resistencia que presenta el aire al movimiento del sistema cohete-vagoneta sea directamente proporcional a su velocidad, que el combustible se quema a un ritmo constante $\alpha$ (masa/tiempo) y que la velocidad de expulsión de los gases respecto del cohete ($w$) sea constante. **a)** Obtener la velocidad del sistema cohete-vagoneta en función del tiempo. **b)** Determinar la velocidad del sistema en el instante en que se acaba el combustible.

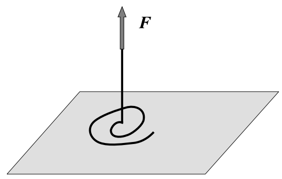
**18.12.-** Un cohete, cuyo peso es 5 t, está preparado para ser disparado verticalmente. Si la velocidad con que los gases son expulsados respecto al cuerpo del cohete es de 800 m/s: **a)** ¿Qué masa de gas debe ser expulsada por segundo para suministrar un empuje inicial que contrarreste el peso del cohete? **b)** ¿Ídem para que el cohete despegue con una aceleración inicial de 29.4 m/s$^2$.

**18.13.-** Un cohete cuyo peso total es 5 kg, de los que el 85% corresponden al combustible, expele los productos de combustión a un ritmo constante de 0.5 kg/s, con una velocidad relativa al cohete de 400 m/s. El cohete es disparado verticalmente hacia arriba, partiendo del reposo. **a)** Calcular la velocidad y la altura alcanzada por el cohete en el instante en que se agota el combustible. **b)** Calcular la máxima altura alcanzada por el cohete. (Despreciar la resistencia del aire y considerar constante el valor de la aceleración gravitatoria *g*).

**18.14.-** En un cohete de dos secciones, la primera sección se desprende una vez se ha agotado su combustible y, acto seguido, se enciende la segunda sección. El peso total de la primera sección es 40 t, de las que 36 t son de combustible; el peso total de la segunda sección es 2 t, de las que 1.8 t son de combustible. El cohete tiene como misión acelerar una carga útil de 300 kg. El combustible es capaz de hacer que los gases de combustión salgan con una velocidad de 2400 m/s respecto al cuerpo del cohete. Despreciando los efectos gravitatorios (que son pequeños si el ritmo de consumo es grande) calcular: **a)** la velocidad del cohete cuando se agota la primera sección; **b)** la velocidad del cohete cuando se agota la segunda sección. **c)** Supóngase que toda la provisión de combustible del cohete de dos secciones se utilizase en un cohete de una sola sección del mismo peso (42 t + la carga útil). ¿Cuál sería la velocidad del cohete al consumirse el combustible? Este problema ilustra la ventaja de los cohetes de varias secciones sobre los de sección única; el resultado es de validez general.

**18.15.-** Un avión a reacción viaja en vuelo horizontal con una velocidad de 540 km/h. El reactor toma cada segundo 58.3 m$^3$ de aire, que tienen una masa de 60 kg, que utiliza para quemar 2 kg por segundo de combustible. La energía liberada en la combustión se emplea en comprimir los gases resultantes y en expulsarlos hacia atrás con una velocidad de 1620 km/h respecto al avión. Calcular el empuje y la potencia desarrollada por el reactor.

**18.16.-** Una cadena uniforme, de longitud *L* y masa *M*, se encuentra inicialmente en reposo, amontonada y enrollada sobre una superficie horizontal. Tiramos verticalmente hacia arriba de uno de los extremos de la cadena, de modo que cada eslabón de la cadena permanece en reposo hasta el instante en que comienza a elevarse y que la velocidad del extremo superior sea constante. **a)** Calcular la potencia que desarrolla la fuerza vertical aplicada. **b)** ¿Qué cantidad de esa potencia se disipa? ¿Cómo explica Vd. esa disipación de potencia?

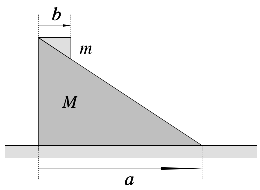



Prob. 18.16

**18.17.-** Supongamos ahora que vamos levantando la cadena del Problema 18.16 mediante la aplicación de una fuerza constante en uno de sus extremos, cuyo módulo sea exactamente igual al peso total de la cadena. **a)** Escribir la ecuación diferencial del movimiento del extremo superior de la cadena mientras aún quedan eslabones en reposo sobre el plano horizontal. **b)** Calcular la velocidad que tendrá el último eslabón de la cadena en el instante en que abandone el plano horizontal. **c)** Calcular el trabajo realizado por la fuerza aplicada hasta el instante en que se pone en movimiento el último eslabón de la cadena, así como el aumento en su energía cinética y potencial. ¿Es conservativo el sistema?

**18.18.-** Un núcleo de Uranio-238, que se encuentra en reposo en el sistema de laboratorio (SL), emite una partícula alfa de 4.1 MeV de energía cinética. **a)** Calcular la velocidad de la partícula alfa y la del núcleo de residual (el torio-234). **b)** Calcular la energía cinética del núcleo residual. **c)** ¿De dónde proviene la energía cinética de los fragmentos?

**18.19.-** Dos prismas triangulares, de masas *M* y *m*, y anchuras *a* y *b*, están en reposo, tal como se indica en la figura adjunta, sobre un tablero horizontal liso. Las superficies de contacto entre los dos prismas son, también, perfectamente lisas. Determinar el retroceso del prisma inferior hasta el instante en que la cara vertical del prisma superior alcanza el tablero horizontal. Aplicación numérica: $M$ = 10 kg, $m$ = 2 kg, $a$ = 40 cm y $b$ = 10 cm.




Prob. 18.19

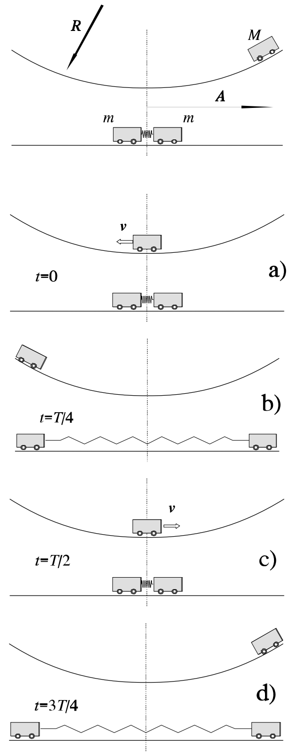
**18.20.-** Cada uno de los componentes de una *estrella doble* tiene una masa igual a la del Sol y están separados entre sí por una distancia de una *unidad astronómica*. Suponiendo que el movimiento relativo sea circular, ¿cuál será el periodo de revolución?

**18.21.-** Supóngase una estrella doble asimétrica, y sean $m_S$ y $2m_S$ las masas de sus componentes ($m_S$ es la masa del Sol), que están separadas entre sí por una distancia de 1 U.A. (unidad astronómica). Describir el movimiento del sistema y calcular el periodo de revolución.

**18.22.-** Calcular la separación entre el electrón y el positrón en el átomo de positronio, sabiendo que la energía del estado fundamental del mismo es -6.8 eV.

**18.23.-** Dos deslizadores, cuyas masas respectivas son $m$ y $2m$, están colocados sobre un carril de aire y unidos entre sí mediante un muelle ligero de longitud natural $l_0$ y constante elástica $k$. Aproximamos los dos deslizadores hasta que el muelle se comprime una distancia $D$, y enseguida los abandonamos partiendo del reposo. **a)** Calcular la frecuencia de las oscilaciones del sistema. **b)** Calcular la energía de las oscilaciones. ¿Cómo se reparte esa energía entre los dos deslizadores? **c)** Determinar la amplitud de las oscilaciones de cada deslizador, así como sus respectivas velocidades máximas.

**18.24.-** Un carrito de masa $M$, provisto de pequeñas ruedas, oscila en torno al punto más bajo de un carril circular de radio $R$ contenido en un plano vertical, como se muestra en la figura (a), con una amplitud $A \ll R$. Sobre un carril horizontal, colocado justamente debajo del carril circular, se colocan otros dos carritos idénticos, de masa $m$ cada uno de ellos, unidos por un muelle ligero comprimido, de constante elástica $k$, como se muestra en el figura (a). En el instante en que el carrito $M$ pasa por el fondo del carril circular, se libera el sistema de los dos carritos inferiores, que comienzan a oscilar. El movimiento subsiguiente está representado, a intervalos de tiempo de cuartos de periodo, en las figuras (b), (c), (d), y (e). ¿Cuál es el valor de la masa $m$ en función de la masa $M$?

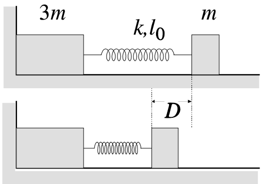



Prob. 18.24

**18.25.-** Demostrar que el sistema oscilante constituido por dos masas idénticas acopladas mediante un muelle ligero de constante elástica $k$ es equivalente al que resulta de cortar el muelle por la mitad de modo que cada una de las masas oscile independientemente respecto al centro de masa en el punto medio.

**18.26.-** Dos deslizadores, cuyas masas respectivas son $m_1$ y $m_2$, se encuentran inicialmente en reposo sobre un carril de aire y están interconectados mediante un muelle de constante elástica $k$ y longitud natural $l_0$. Repentinamente, se le imprime una velocidad $v_0$ al deslizador $m_1$, en dirección hacia el deslizador $m_2$. **a)** Calcular la velocidad de cada deslizador en el instante en que el muelle vuelva a quedar relajado. **b)** Calcular la velocidad del centro de masa y la frecuencia de las oscilaciones relativas. **c)** Describir detalladamente el movimiento del sistema en cada uno de los casos siguientes: **i)** $m_1 = m_2/2$, **ii)** $m_1 = m_2$, **iii)** $m_1 = 2m_2$.

**18.27.-** Dos bloques, de masas respectivas $m$ y $3m$, están colocados sobre una superficie horizontal lisa, y unidos mediante un muelle de constante elástica $k$, como se muestra en la figura adjunta. Se comprime el muelle, desplazando la masa $m$ hacia la izquierda una distancia $D$, manteniéndose la masa $3m$ en contacto con la pared vertical; entonces, se abandona el sistema partiendo del reposo. **a)** Describir el movimiento subsiguiente del sistema. **b)** ¿Hasta que punto se desplazará la masa $m$ antes de que la masa $3m$ se ponga en movimiento?




Prob. 18.27

¿Cuál será su velocidad en ese instante? **c)** ¿Cuál será la velocidad del centro de masa del sistema cuando el bloque $3m$ deje de estar en contacto con la pared? **d)** Determinar la frecuencia de las oscilaciones. ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones relativas? ¿Ídem de cada uno de los bloques?

**18.28.-** A partir de medidas espectroscópicas se ha determinado la frecuencia de la vibración fundamental de la molécula de hidrógeno ($H_2$); el resultado es $\nu_0 = 1.3 \times 10^{14}$ Hz. **a)** ¿Cuál es la constante elástica efectiva de las fuerzas de acoplamiento entre los dos átomos de hidrógeno? **b)** ¿Es razonable ese valor de la constante elástica efectiva? Para averiguarlo, supóngase que deformamos la molécula $H_2$, cuya distancia interatómica correspondiente al equilibrio es 0.74611 Å, en 0.5 Å. El trabajo realizado sobre la molécula será suficiente, probablemente, para romperla. Compárese el resultado así obtenido con la *energía de enlace molecular* para el $H_2$, que es de 104.18 kcal/mol, y explíquese las hipótesis simplificadoras que hemos necesitado hacer.

**18.29.-** En el análisis de las líneas espectrales asociadas con las vibraciones moleculares del monóxido de carbono (CO) se ha encontrado una línea, asociada con la vibración fundamental, cuya longitud de onda es $4.7 \times 10^{-6}$ *m* (en el infrarrojo). **a)** Calcular la constante elástica efectiva para la molécula de CO. **b)** Comprobar la aceptabilidad del resultado anterior; utilizar para ello el mismo procedimiento que en el Problema 18.28. Datos para el CO: distancia interatómica $r_0$ =1.13 Å, energía de enlace molecular (energía de disociación) $E_D$ = 256.7 kcal/mol, $m(^{12}C)$ = 12 u, $m(^{16}O)$ = 16 u, 1 u = $1.6605 \times 10^{-27}$ kg.

**18.30.-** De acuerdo con P.M. MORSE (1929), la energía potencial de una molécula diatómica viene expresada aproximadamente por

$$E_p = D\left[1 - e^{-a(r-r_0)^2}\right]$$

donde $D$ y $a$ son dos constantes cuyos valores pueden determinarse a partir de datos espectroscópicos, $r$ es la distancia interatómica y $r_0$ es la distancia interatómica correspondiente al equilibrio. **a)** Estudiar analíticamente la función $E_p(r)$ y representarla gráficamente. **b)** ¿Cuál es el significado físico de la constante $D$? **c)** Expresar la constante elástica efectiva $k$ en función de $a$ y $D$. **d)** La energía de disociación de la molécula de Cl H es 103.1 kcal/mol y la frecuencia de la vibración fundamental de dicha molécula es $8.7 \times 10^{13}$ Hz. Con esos datos, evaluar las constantes $a$ y $D$ de la expresión de Morse para el 2Cl H.

**18.31.-** Entre dos átomos idénticos, de masa $m$, existe una fuerza atractiva que decrece como $r^{-7}$ (fuerza de Van der Waals) y una fuerza repulsiva que decrece como $r^{-l}$, con $l > 7$. **a)** Demostrar que la energía potencial interna de la molécula puede expresarse por

$$E_p = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^n}$$

donde $A$ y $B$ son constantes. **b)** Estudiar analíticamente el comportamiento de la función $E_p(r)$, significando 2la importancia relativa de cada término. Representar gráficamente la función $E_p(r)$. **c)** Demostrar que la separación de equilibrio entre ambos átomos es

$$r_0 = \left(\frac{nB}{6A}\right)^{\frac{1}{n-6}}$$

**d)** Demostrar que la energía de disociación de la molécula puede expresarse en la forma

$$D = \left(\frac{n-6}{n}\right)\frac{A}{r_0^6}$$

y que la constante efectiva es

$$k = \frac{6\,nD}{r_0^2}$$

**e)** Demostrar que la frecuencia de las pequeñas oscilaciones moleculares es

$$\omega^2 = \frac{12\,nD}{m r_0^2}$$