Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Temario

1) Cinemática rotacional.
2) Dinámica rotacional.
3) Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
4) La ley de la gravitación de Newton.
5) Oscilaciones.
6) Movimiento ondulatorio.
7) Ondas sonoras.

Temario

5. Oscilaciones.
    1. Oscilaciones de un resorte. Ley de Hooke.
    2. Movimiento armónico simple (MAS).
    3. Solución de la ecuación del MAS.
    4. Energías cinética y potencial en el MAS.
    5. Objeto colgado de un resorte vertical.
    6. Péndulos simple, físico y de torsión.
    7. Movimiento general en las proximidades del equilibrio.
    8. Oscilaciones amortiguadas.
    9. Oscilaciones forzadas y resonancia.

1.- Oscilaciones de un resorte. Ley de Hooke.

Se llama *movimiento periódico* al movimiento de un objeto que se repite regularmente, de forma que el objeto regresa a una posición dada después de un intervalo fijo de tiempo.

No es complicado identificar movimientos periódicos a nuestro alrededor:

- El regreso a casa cada tarde (o noche).
- Regresas a la mesa cada noche a cenar.
- Una masa suspendida de una cuerda, que es alejada de su vertical, se mueve hacia adelante y hacia atrás volviendo a la misma posición a intervalos regulares.
- La tierra vuelve a la misma posición en su órbita alrededor del sol cada año, dando por resultado la variación entre las cuatro estaciones.
- La luna vuelve a la misma relación con la tierra y el sol, dando por resultado una luna llena aproximadamente una vez al mes

1.- Oscilaciones de un resorte. Ley de Hooke.

Un caso particular de un movimiento periódico es el llamado movimiento oscilatorio.

Se tiene un *movimiento oscilatorio* cuando la fuerza actuante es proporcional al desplazamiento y en dirección opuesta al mismo.

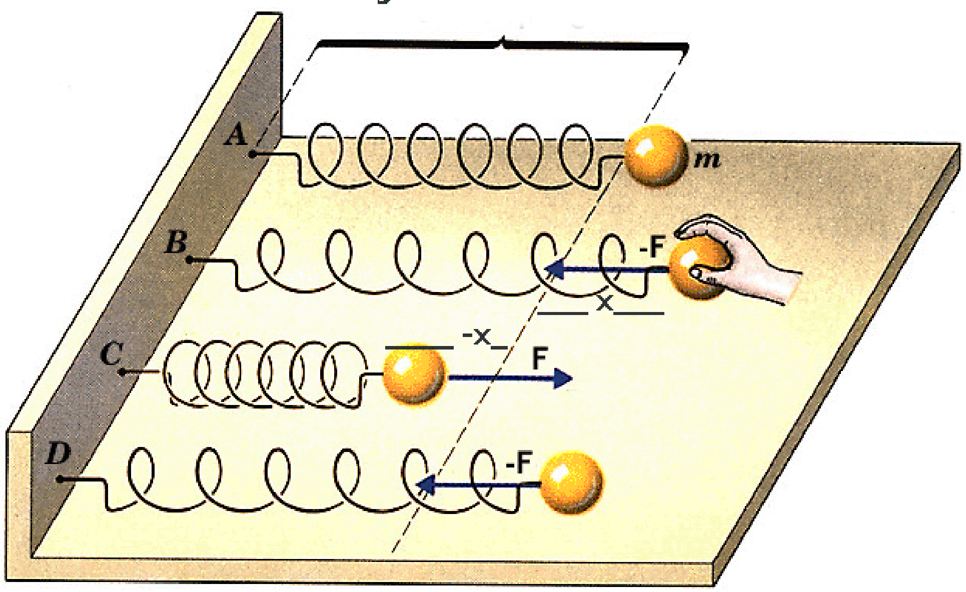
El movimiento oscilatorio, tal como se definió líneas arriba, también se le conoce como *movimiento armónico simple* (MAS).

Algunos ejemplos de movimiento oscilatorio (o MAS) son:

- Sistema masa-resorte.
- Péndulos.
- Vibraciones en un instrumento de cuerdas (guitarra, violín, etc.).
- Moléculas y átomos en un sólido.
- Etc.

1.- Oscilaciones de un resorte. Ley de Hooke.

Uno de los movimientos periódicos más estudiado es el de un sistema masa-resorte.



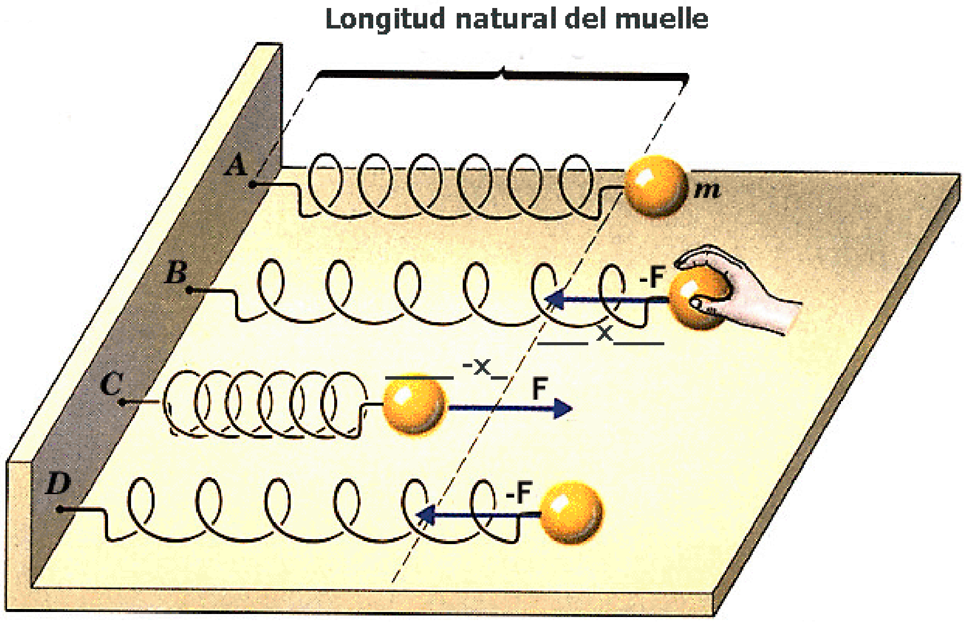
Para poder estudiar el movimiento de este sistema es importante analizar cómo es la fuerza que ejerce un resorte.

Experimentalmente se observa que un resorte ejerce una fuerza proporcional y opuesta a la deformación x (a partir de su longitud natural) que experimenta.

$$F \sim -x$$

1.- Oscilaciones de un resorte. Ley de Hooke.

El resultado anterior se conoce como Ley de Hooke, y es válida para la mayoría de los resortes, siempre y cuando la deformación que sufran no sea demasiado grande.



En 1676, Robert Hooke enunció que "la fuerza elástica de un resorte depende linealmente de la deformación", de tal forma que

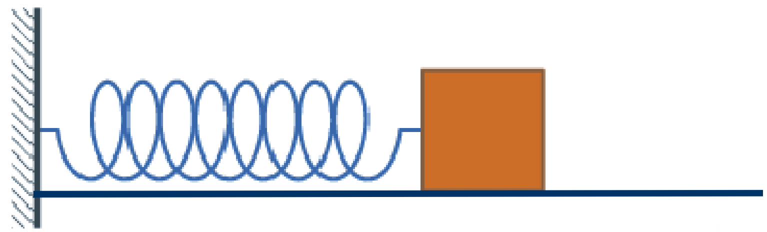
$$F = -kx$$

donde F es la fuerza (en N), x es la deformación a partir de la longitud natural (en m) y k es la constante de resorte que tiene unidades de Fuerza entre distancia (N/m).

http://webphysics.davidson.edu/applets/animator4/demo_hook.html

2.- Movimiento Armónico Simple.

Una vez que tenemos una expresión para la fuerza ejercida por un resorte, es posible aplicar la segunda ley de newton a este sistema



Considerando que el resorte está caracterizado por una constante de elasticidad k y el bloque, colocado sobre una superficie horizontal sin fricción, tiene una masa m el aplicar la segunda ley de Newton obtenemos

$$\sum F = -kx = ma_x$$

de donde podemos escribir una ecuación para $x(t)$ como

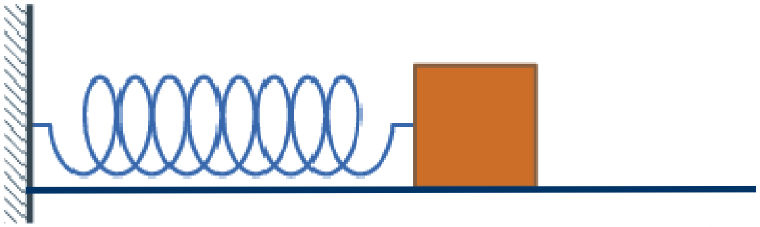
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

que resulta ser la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte.

2.- Movimiento Armónico Simple.

La solución más general de esta ecuación es de la forma

$$x(t) = ACos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$



donde

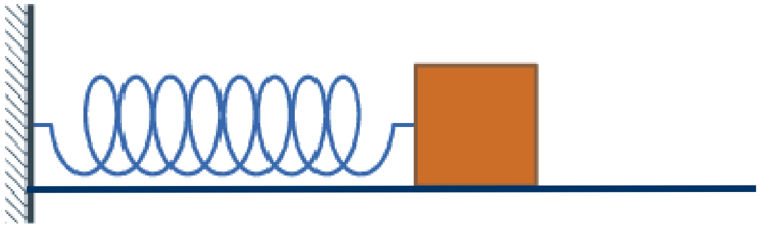
- A es la amplitud (o máxima elongación) y ϕ es la fase inicial, ambas son constantes que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales del sistema; mientras que
- ω_0 es la frecuencia natural de oscilación del resorte, y está dada por

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}}$$

las unidades de la frecuencia de oscilación ω_0 son rad/s.

2.- Movimiento Armónico Simple.

A partir de la expresión para la posición, a saber



$$x(t) = ACos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

podemos advertir que esta se repite cada vez que $\omega_0 t + \phi$ se incrementa en 2π rad. Veamos qué tiempo le toma hacerlo.

Para ello, escribamos el argumento

$$\omega_0 t + \phi + 2\pi = \omega_0\left(t + T\right) + \phi$$

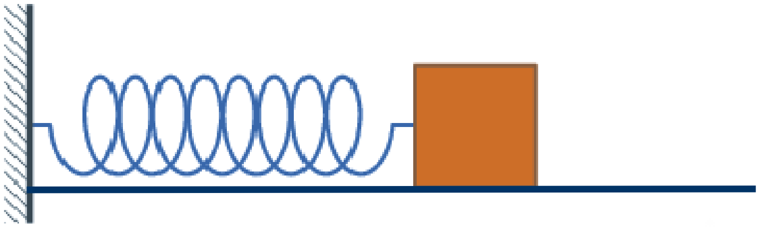
de donde

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

El periodo T es el tiempo que se tarda en completar un ciclo, así que podemos decir que en ese tiempo se ha efectuado una oscilación.

2.- Movimiento Armónico Simple.

El inverso del periodo (T) recibe el nombre de frecuencia f del movimiento.



$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La frecuencia f representa el número de oscilaciones que efectúa la partícula por unidad de tiempo.

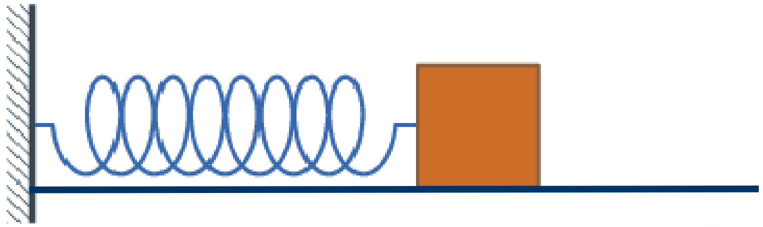
Así que tomando como unidad de tiempo el segundo, el periodo se mide en segundos, mientras que la frecuencia en Hertz ($1\text{Hz}=1\text{s}^{-1}$).

Con lo anterior, la frecuencia (angular) de oscilación ω_0 se puede reescribir como

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

2.- Movimiento Armónico Simple.

Con lo anterior, y regresando al sistema masa-resorte, podemos escribir las expresiones correspondientes para la frecuencia y el periodo de su movimiento oscilatorio.



La frecuencia f para un sistema caracterizado por una masa m y un constante elástica k está dada por

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mientras que el periodo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2.- Movimiento Armónico Simple. Ejemplos.

1. Las frecuencias de vibración de los átomos de los sólidos a temperaturas normales son del orden de 10.0THz. Imagínese que los átomos estuviesen unidos entre sí por “resortes”. Supóngase que un átomo de plata aislado vibre con esta frecuencia y que los demás átomos estén en reposo. Calcúlese la constante de fuerza efectiva. Un mol de plata tiene una masa de 108g y contiene 6.02×10^{23} átomos.

2.- Movimiento Armónico Simple. Ejemplos.

2. En una rasuradora eléctrica, la hoja se mueve de un lado a otro sobre una distancia de 2.00mm. El movimiento es armónico simple, con una frecuencia de 120Hz. Halle (a) la amplitud, (b) la velocidad máxima de la hoja, y (c) la aceleración máxima de la hoja.

2.- Movimiento Armónico Simple. Ejemplos.

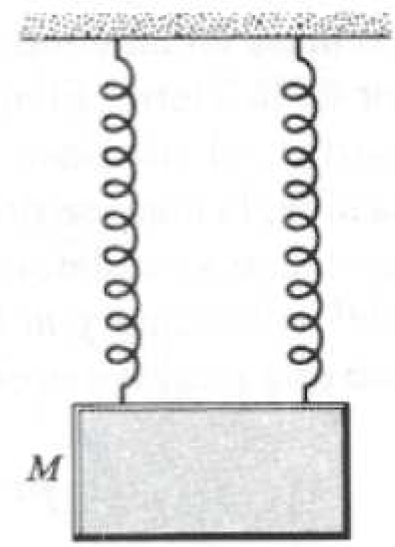
3. El émbolo en el cilindro de una locomotora tiene una carrera de 76.5cm. ¿Cuál es la velocidad máxima del émbolo si las ruedas impulsoras dan 193rev/min y el émbolo se mueve con un movimiento armónico simple?

2.- Movimiento Armónico Simple. Ejemplos.

4. Un bloque está sobre un émbolo que se mueve verticalmente con un movimiento armónico simple. (a) ¿A qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el émbolo si el periodo del movimiento del émbolo es de 1.18s? (b) Si el émbolo tiene una amplitud de 5.12cm en su movimiento, halle la frecuencia máxima a la cual estarán en contacto el bloque y el émbolo continuamente.

2.- Movimiento Armónico Simple. Ejemplos.

5. Un resorte sin masa de 3.60N/cm de constante de fuerza es cortado en dos mitades. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza de cada mitad? (b) Las dos mitades, suspendidas por separado, soportan un bloque de masa *M* (véase la figura anexa). El sistema vibra con una frecuencia de 2.87Hz. Halle el valor de la masa *M*.



3.- Solución de la ecuación del MAS.

Partiendo de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

proponemos como solución general, una combinación lineal del tipo

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, mientras que r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación característica que corresponde a la ED, a saber

$$mr^2 = -k$$

Así que en este caso $$r = \pm i\omega_0$$

donde se ha definido

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

3.- Solución de la ecuación del MAS.

Por lo que la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$$

resulta ser

$$x(t)=C_1e^{+i\omega_0 t}+C_2e^{-i\omega_0 t}$$

Haciendo un desarrollo de las exponenciales podemos escribir

$$x(t)=C_1\left[Cos\left(\omega_0 t\right)+iSen\left(\omega_0 t\right)\right]+C_2\left[Cos\left(\omega_0 t\right)-iSen\left(\omega_0 t\right)\right]$$

y agrupando términos

$$x(t)=\left(C_1+C_2\right)Cos\left(\omega_0 t\right)+i\left(C_1-C_2\right)Sen\left(\omega_0 t\right)$$

Sin embargo, como la solución debe ser real y dado que C_1 y C_2 son dos constantes ARBITRARIAS podemos escribir

$$A=\left(C_1+C_2\right)\quad \text{y} \quad B=i\left(C_1-C_2\right)$$

3.- Solución de la ecuación del MAS.

Con todo lo anterior, la solución mas general de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$$

se escribe como

$$x(t)=ACos\left(\omega_0 t\right)+BSen\left(\omega_0 t\right)$$

La solución anterior es equivalente a

$$x(t)=DCos\left(\omega_0 t+\phi\right)$$

con

$$D=\sqrt{A^2+B^2}$$

y

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)+\begin{cases} 0 & \text{Si} \quad A>0 \quad B>0 \\ \pi & \text{Si} \quad A<0 \\ 2\pi & \text{Si} \quad A>0 \quad B<0 \end{cases}$$

3.- Solución de la ecuación del MAS.

Si consideramos el movimiento armónico simple de un objeto que al tiempo t=0, se ubica en la posición x_0 con una velocidad v_0, podemos determinar de manera precisa las constantes A y B presentes en la solución

$$x(t) = ACos\left(\omega_0 t\right) + BSen\left(\omega_0 t\right)$$

ya que esta ecuación, junto con la de la velocidad (obtenida al derivar con respecto al tiempo)

$$v(t) = -A\omega_0 Sen\left(\omega_0 t\right) + B\omega_0 Cos\left(\omega_0 t\right)$$

nos permiten escribir, a partir de los valores iniciales de posición y velocidad

$$x_0 = A \qquad \text{y} \qquad v_0 = B\omega_0$$

Con lo que

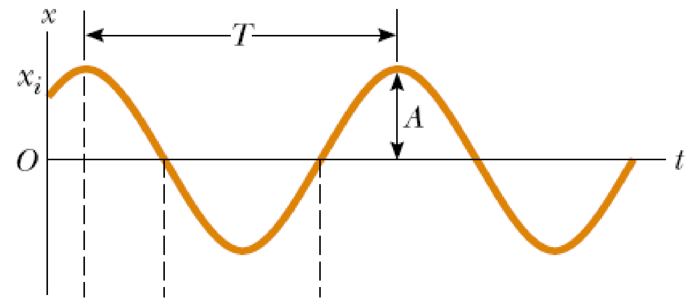
$$x(t) = x_0 Cos\left(\omega_0 t\right) + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right) Sen\left(\omega_0 t\right)$$

y

$$v(t) = -x_0\omega_0 Sen\left(\omega_0 t\right) + v_0 Cos\left(\omega_0 t\right)$$

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.

Tomando como punto de partida la ecuación para la posición de una partícula que desarrolla un movimiento armónico simple



$$x(t) = ACos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

podemos escribir expresiones para la velocidad

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 Sen\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

y la aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 Cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.

A partir de la expresión para la velocidad

$$v(t) = -A\omega_0 Sen\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

vemos que no es difícil escribir la expresión para la energía cinética en un movimiento armónico simple, resultando

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mA^2\omega_0^2 Sen^2\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

o también

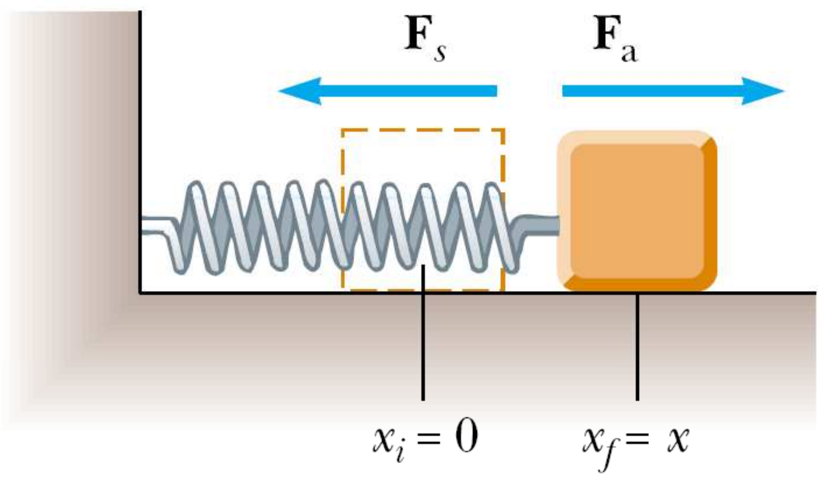
$$K = \frac{1}{2}kA^2 Sen^2\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

donde hemos usado

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.

Para calcular la energía potencial basta recordar que esta corresponde al trabajo realizado sobre el sistema.



Así que si consideramos el esquema mostrado, podemos suponer (si el movimiento se realiza con velocidad constante) que la fuerza aplicada es igual en magnitud a la fuerza del resorte, por lo que

$$U = W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_a \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad U = \int_{x_i=0}^{x_f=x} (kx)\,dx$$

Con lo que la energía potencial elástica U almacenada en un resorte de constante k, al ser estirado (o contraído) una distancia x a partir de su posición de equilibrio es

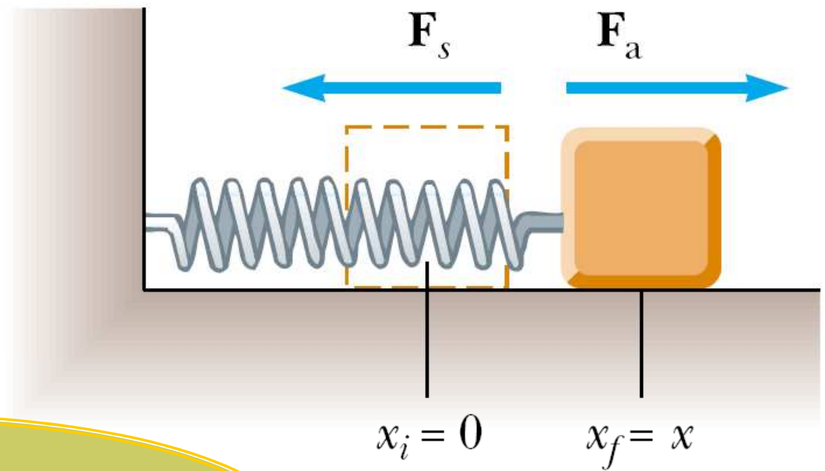
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.

Si a continuación tomamos en cuenta que la posición del objeto en un MAS está dada por

$$x(t) = ACos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

podemos escribir la energía potencial elástica como

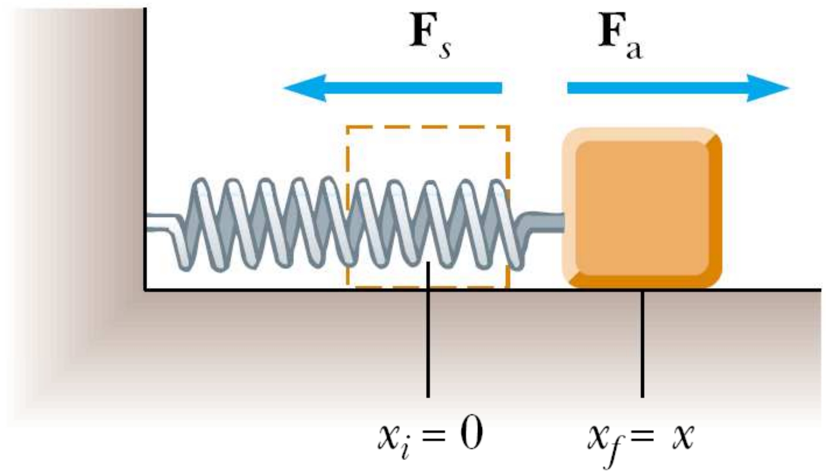


$$U = \frac{1}{2}kA^2Cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

Es importante notar que no sólo la energía cinética es positiva, también lo es la energía potencial al depender de cantidades cuadráticas (correspondientes a la amplitud y a un coseno) y de k (que es positiva).

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.

Una vez encontradas las expresiones para las energías cinética y potencial estamos en posibilidades de calcular la energía mecánica total de un objeto que desarrolla un movimiento armónico simple.



Considerando que esta es la suma de ambas

$$E = K + U \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

encontramos que

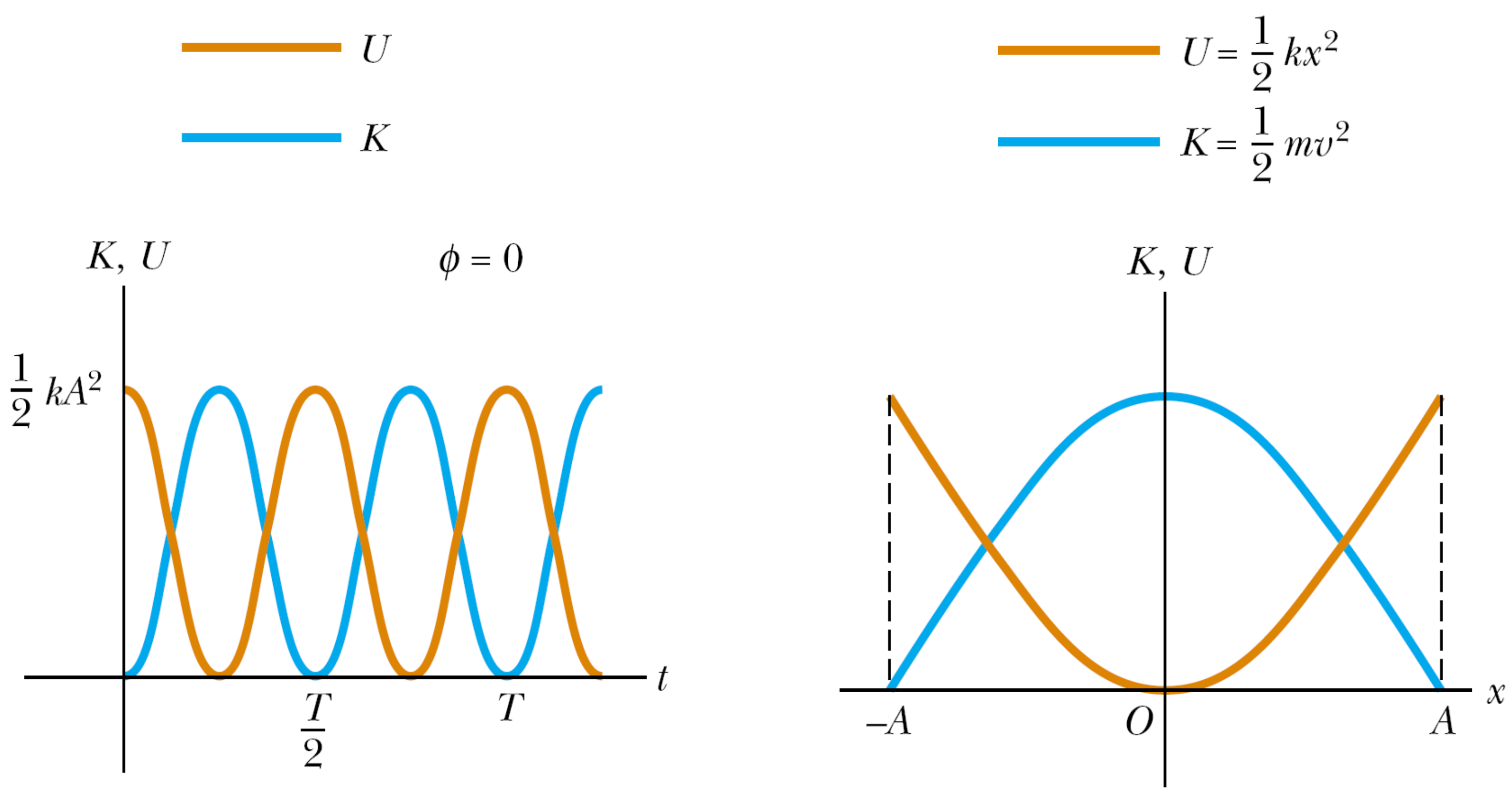
$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 Sen^2\left(\omega_0 t + \phi\right) + \tfrac{1}{2}kA^2 Cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

ó

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

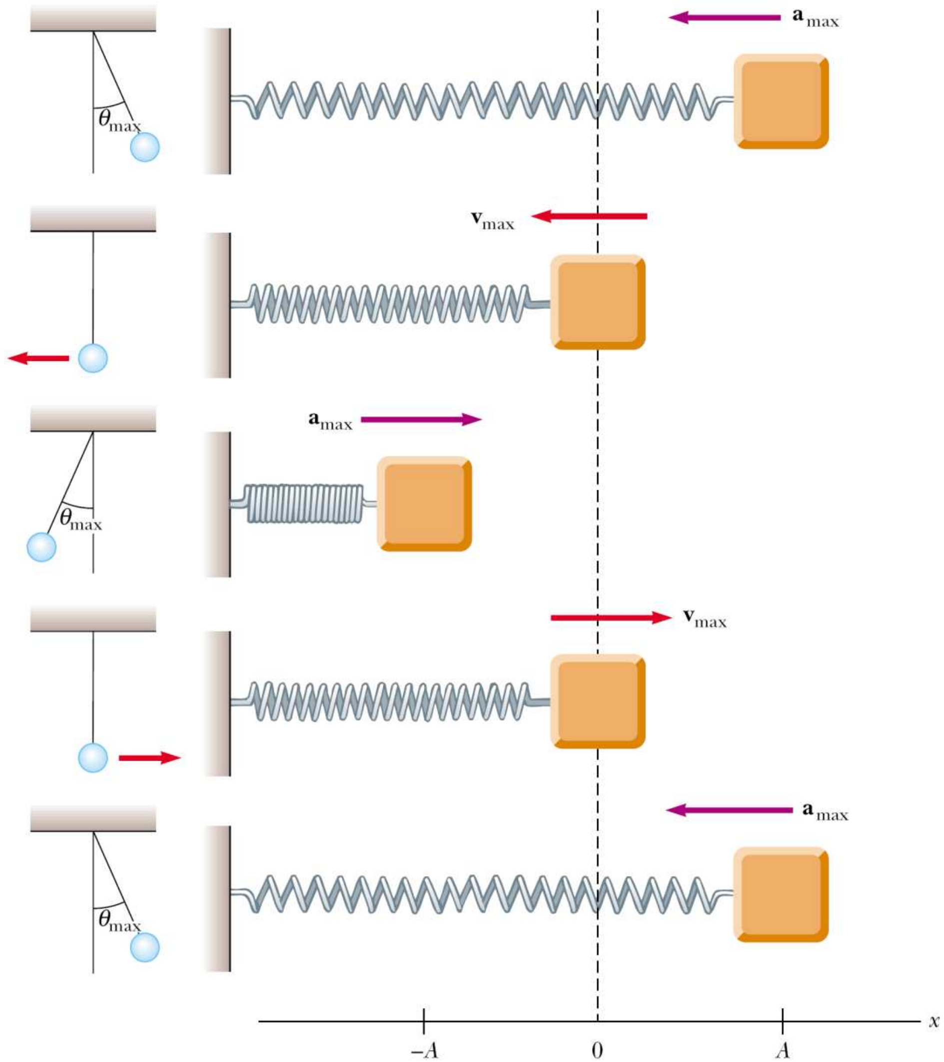
La energía mecánica total es una constante de movimiento que sólo depende de la constante de elasticidad y de la amplitud.

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.



Graficas de las energías potencial y cinética para un oscilador armónico como funciones del tiempo y de la posición.

4.- Energías cinética y potencial en el MAS.



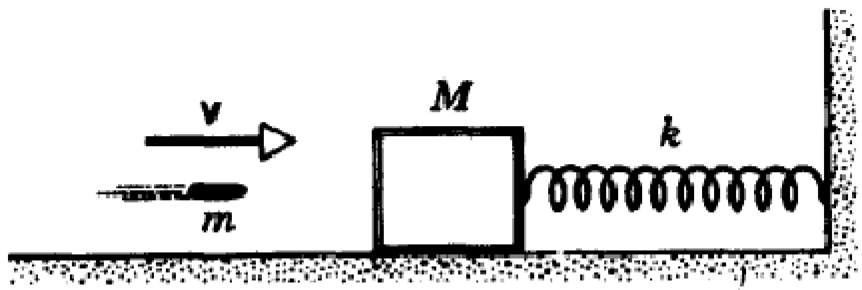
t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

4.- Energías cinética y potencial en el MAS. Ejemplos.

6. Un sistema oscilatorio bloque-resorte tiene una energía mecánica de 1.18J, una amplitud de movimiento de 9.84cm, y una rapidez máxima de 1.22m/s. Halle (a) la constante de fuerza del resorte, (b) la masa del bloque, y (c) la frecuencia de la oscilación.

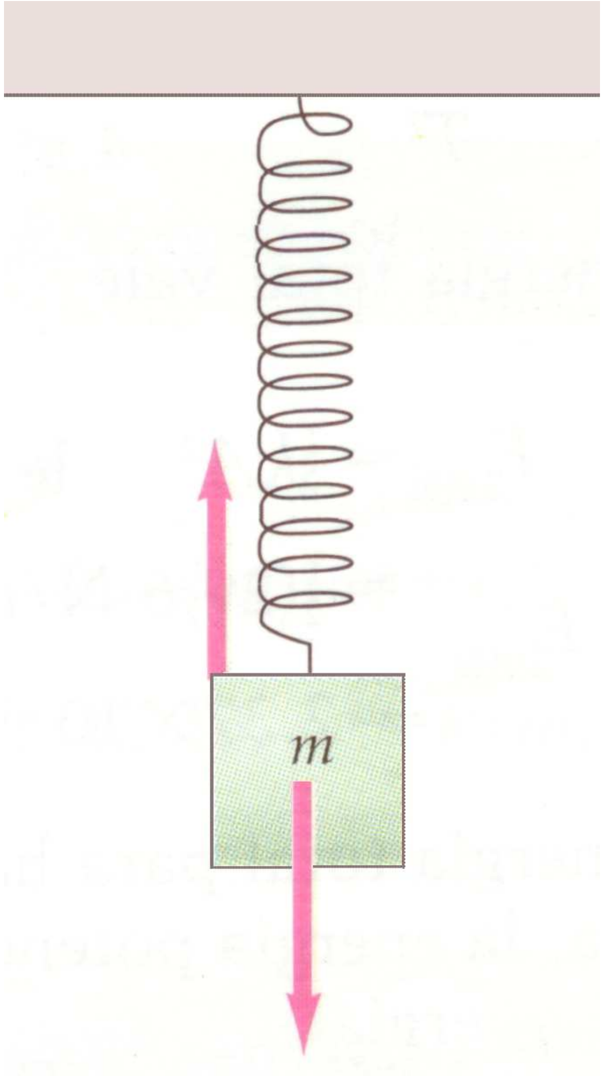
4.- Energías cinética y potencial en el MAS. Ejemplos.

7. Un bloque de masa M, en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está unido a una pared vertical por medio de un resorte de constante de fuerza k. Una bala de masa m y rapidez v golpea al bloque como se muestra en la figura anexa. La bala se queda empotrada en el bloque. Determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante en términos de M, k, m y v.



5.- Objeto colgado de un resorte vertical.

Cuando un cuerpo cuelga de un resorte vertical, como se muestra, además de la fuerza elástica ejercida por el resorte, existe una fuerza mg hacia abajo.



En este caso, la segunda ley de Newton se escribe como

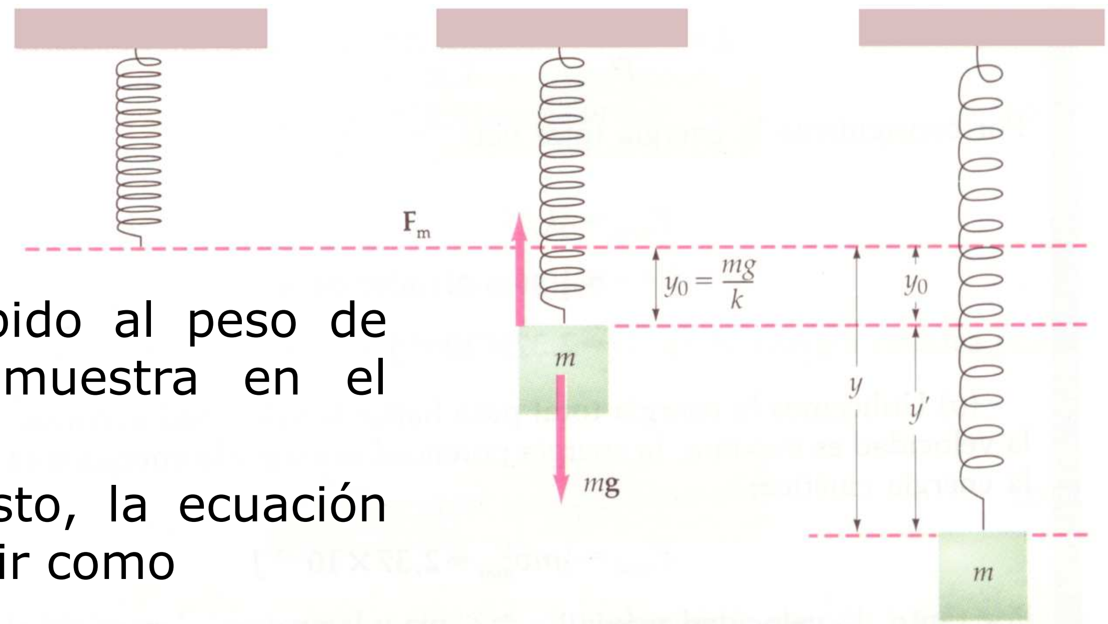
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = ky - mg$$

Como se puede advertir, esta ecuación es similar a la obtenida anteriormente para el sistema masa-resorte, sólo que ahora aparece el término extra debido al peso.

Para eliminar este término, basta hacer un cambio de variable, a saber $y = y' + y_0$.

5.- Objeto colgado de un resorte vertical.

El valor de y_0 involucrado en el cambio propuesto, corresponde a la deformación que en condición de equilibrio experimenta el resorte debido al peso de la masa, tal como se muestra en el esquema anexo.



Con el cambio propuesto, la ecuación diferencial se puede escribir como

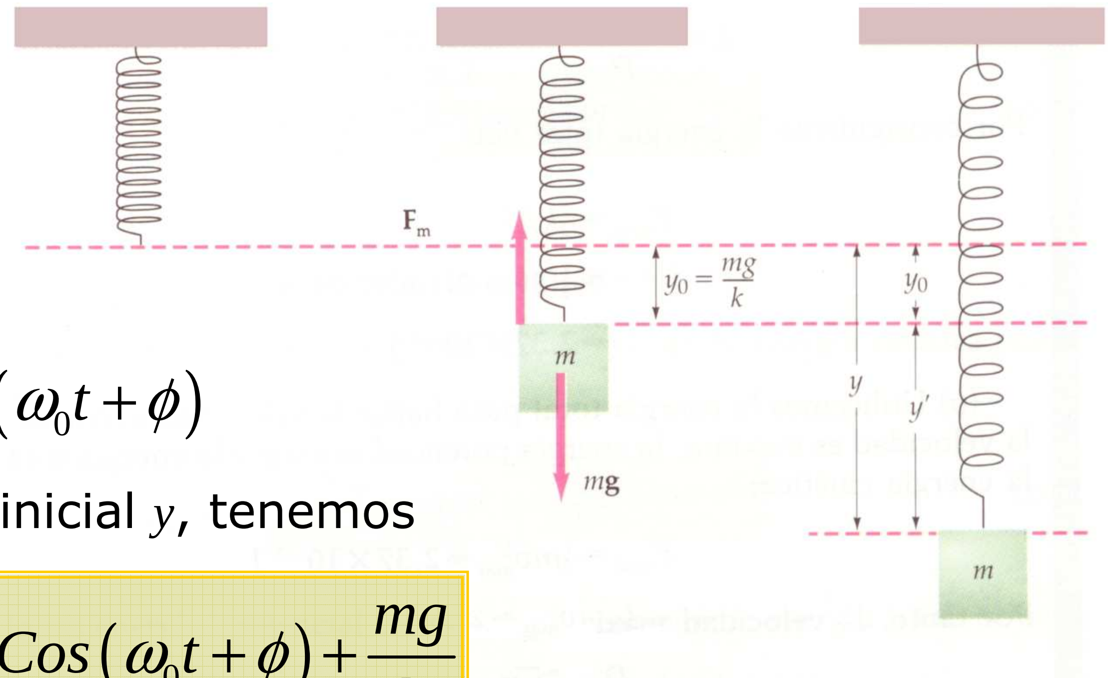
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = k\left(y' + y_0\right) - mg$$

y usando el valor de y_0

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = ky'$$

5.- Objeto colgado de un resorte vertical.

La ecuación a la que llegamos, es justo la ecuación que ya hemos resuelto anteriormente, y cuya solución se puede escribir como



$$y'(t) = ACos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

y regresando a la variable inicial y, tenemos

$$\boxed{y(t) = ACos\left(\omega_0 t + \phi\right) + \frac{mg}{k}}$$

Así pues, el efecto que produce la fuerza gravitatoria es simplemente el de desplazar la posición de equilibrio desde $y = 0$ a $y' = 0$, es decir, a $y = mg/k$; mientras que la frecuencia de oscilación es la obtenida anteriormente,

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

5.- Objeto colgado de un resorte vertical. Ejemplos.

8. Un objeto de 2.14kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 325g colgado abajo del objeto estira adicionalmente al resorte 1.80cm. El cuerpo de 325g es retirado y el objeto entra en oscilación. Halle el periodo del movimiento.

5.- Objeto colgado de un resorte vertical. Ejemplos.

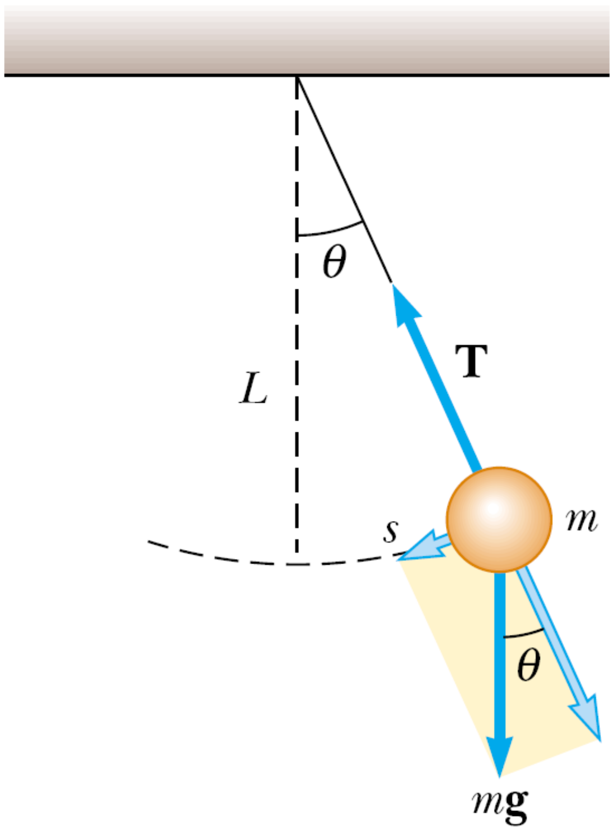
9. Un bloque de 4.0kg está suspendido de un resorte con una constante de fuerza de 5.00N/cm. Una bala de 50.0g se dispara hacia el bloque desde abajo a una velocidad de 150m/s y llega al reposo dentro del bloque. (a) Halle la amplitud del movimiento armónico simple resultante. (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original de la bala aparece como energía mecánica en el oscilador?

6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Un ejemplo familiar de movimiento oscilatorio es el de un péndulo. Es importante establecer que el movimiento de un péndulo es armónico simple sólo si la amplitud de oscilación es pequeña.

La figura anexa muestra un péndulo simple formado por una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m.

En el esquema se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa cuando esta forma un ángulo θ con la vertical.



En este caso podemos descomponer el peso en una componente perpendicular a la trayectoria y una componente tangente a ella, a saber

$$mgCos\theta \quad \text{y} \quad mgSen\theta$$

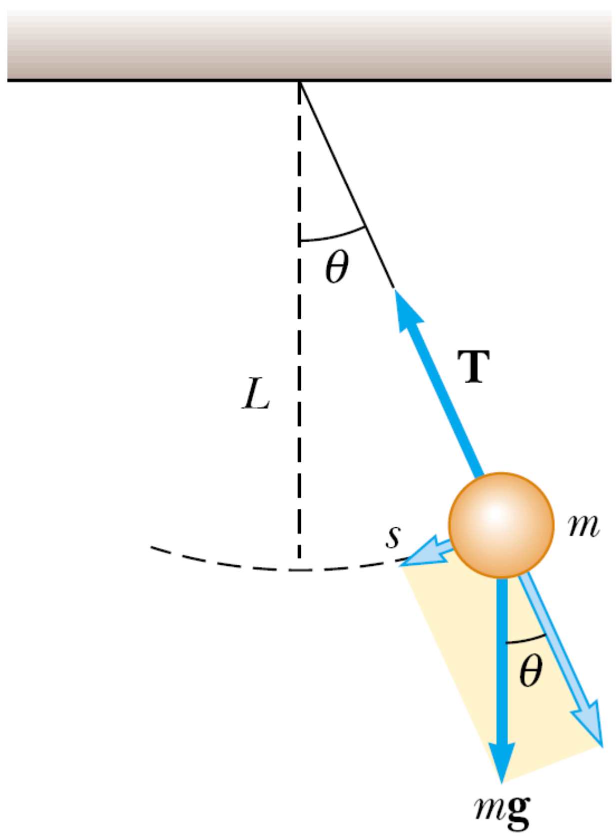
respectivamente.

6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Aplicando la segunda ley de Newton en ambas direcciones obtenemos

$$\sum F_{\perp} = T - mgCos\theta = 0$$

$$\sum F_{\parallel} = -mgSen\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$



donde hemos considerado la dirección positiva como se conviene generalmente: contrarreloj.

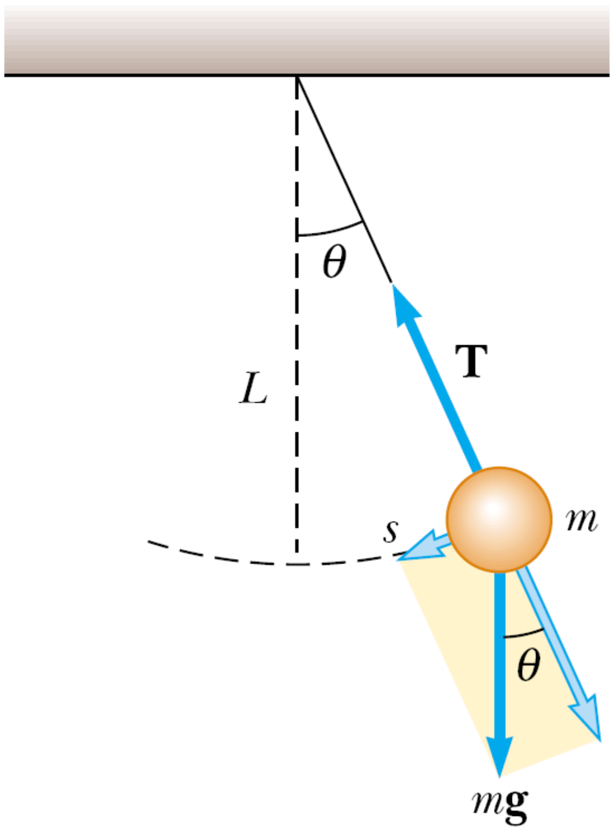
De geometría sabemos que $s = L\theta$, por lo que la ecuación del movimiento tangente a la trayectoria se puede escribir como

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -gSen\theta$$

que corresponde a la ecuación de movimiento de un péndulo de masa m y longitud L.

6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

La ecuación anterior es una ecuación diferencial NO lineal por lo que para resolverla vamos a introducir una aproximación: supondremos que el movimiento se da con una amplitud angular pequeña.



Esta aproximación se llama "de oscilaciones pequeñas" y consiste en considerar que $\theta << 1$, lo que permite aproximar

$$Sen\theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad Cos\theta \approx 1$$

En nuestro caso, la primera aproximación permite escribir

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$$

Que corresponde a un movimiento armónico simple con frecuencia

$$\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

La solución de la ecuación anterior se puede escribir como

$$\theta(t) = \theta_0 Cos\left(\Omega_0 t + \phi\right)$$

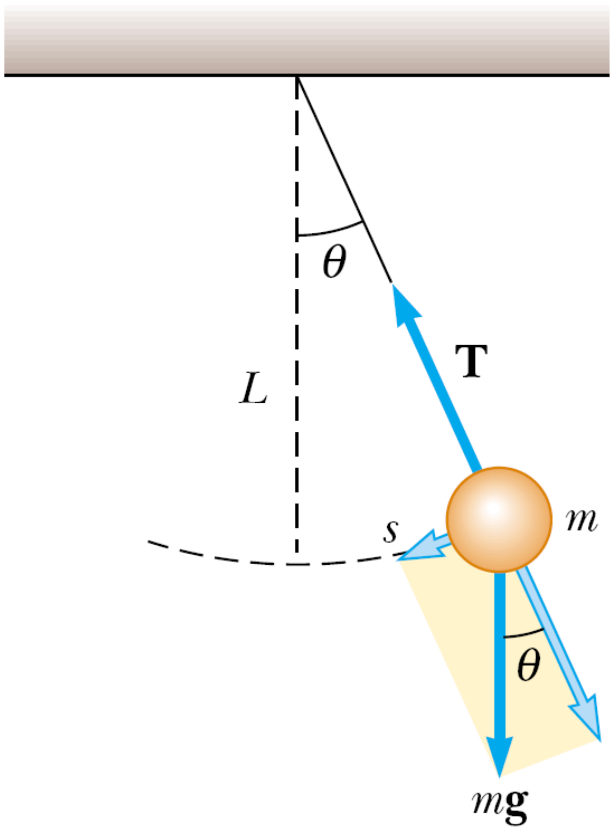
donde

$$\theta_0 = \frac{s_0}{L}$$

es el desplazamiento angular máximo (que debe ser pequeño). Numéricamente se encuentra que la aproximación anterior es satisfactoriamente válida si $\theta_0 <= 10^0$, aproximadamente.

El periodo de este movimiento armónico simple está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



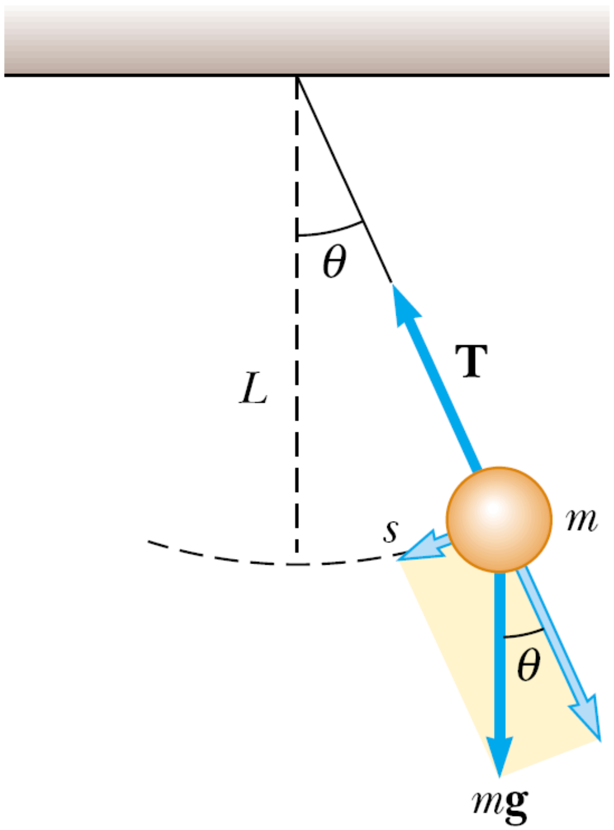
6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Del resultado anterior, vemos que puede medirse la aceleración de gravedad fácilmente utilizando un péndulo simple.

Para ello, únicamente se necesita medir la longitud L y el periodo T de oscilaciones pequeñas (conviene medir el tiempo necesario para *n* oscilaciones y luego dividir por *n* para reducir el error).

Se determina entonces la aceleración g a partir de

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}}$$



Expresión para calcular *g* usando un péndulo simple

6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

10. Un péndulo simple de 1.53m de longitud efectúa 72.0 oscilaciones completas en 180s en una cierta localidad. Halle la aceleración debida a la gravedad en este punto.

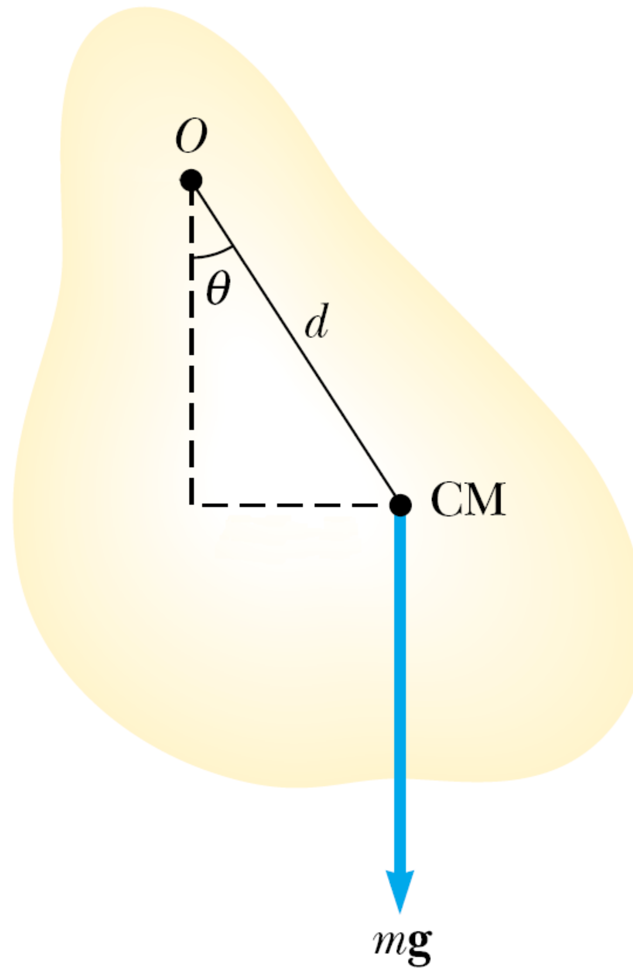
6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Una vez analizado el péndulo simple, pasemos a estudiar el péndulo físico.

Cualquier cuerpo rígido colgado de algún punto diferente de su centro de masas oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio recibiendo el nombre de péndulo físico.

Consideremos un objeto suspendido en un punto O a una distancia d de su centro de masas CM, desplazado un ángulo θ de la vertical, tal como se muestra.

El momento respecto al pivote es $mgdSen\theta$ en el sentido negativo (recuerde la convención de signos para el movimiento rotacional)



6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Por lo que al aplicar la segunda ley de newton para rotaciones, obtenemos

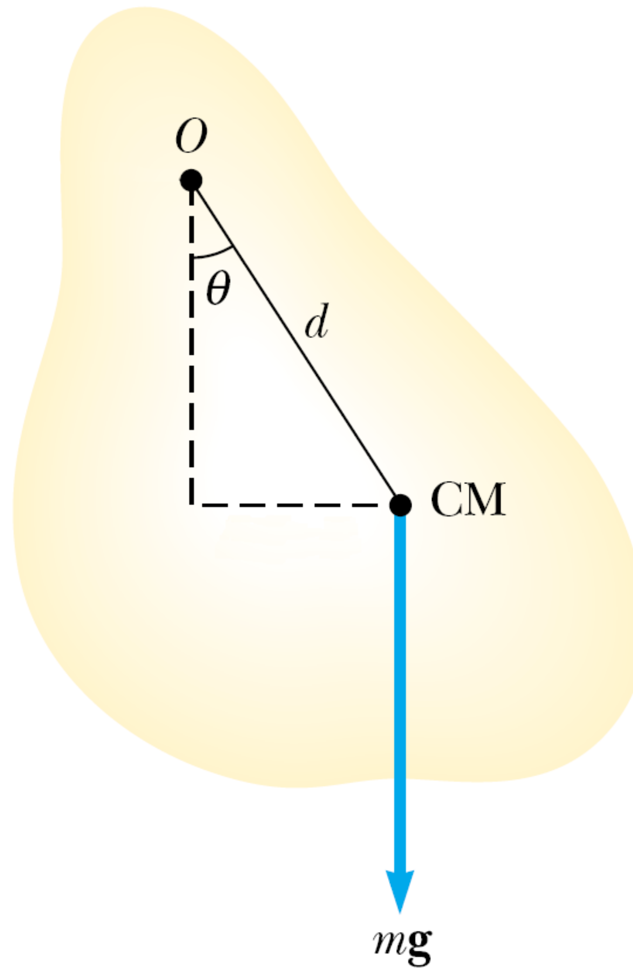
$$\sum \tau = I\alpha \quad \rightarrow \quad -mgdSen\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

en donde I es el momento de inercia respecto al pivote O.

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgdSen\theta}{I}}$$

que corresponde a la ecuación del movimiento de oscilación de un péndulo físico.



6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Nuevamente recurrimos a la aproximación de oscilaciones pequeñas para recuperar el movimiento armónico simple, de tal forma que

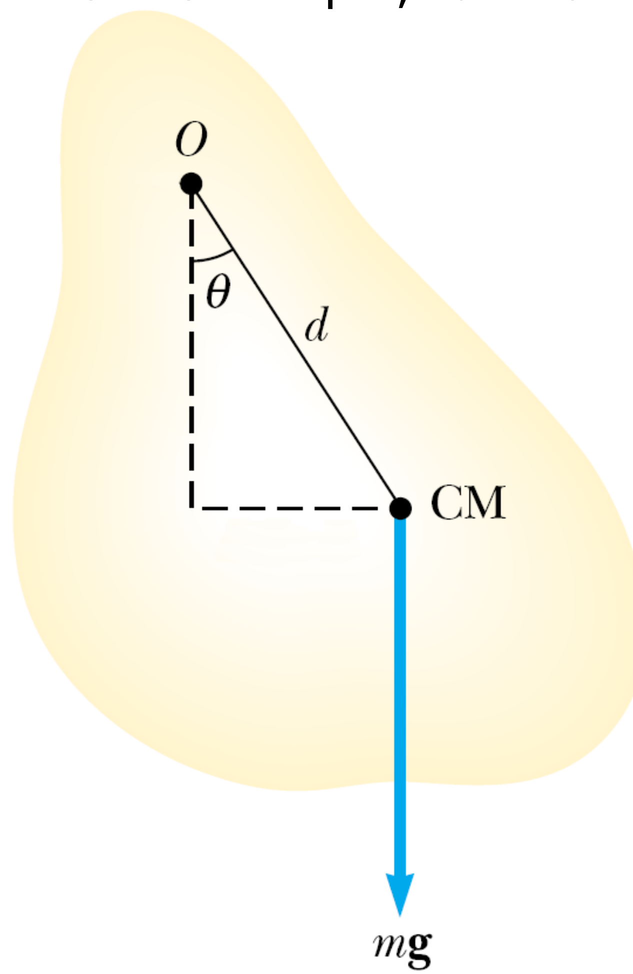
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd\theta}{I}}$$

que se caracteriza por tener una frecuencia dada por

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

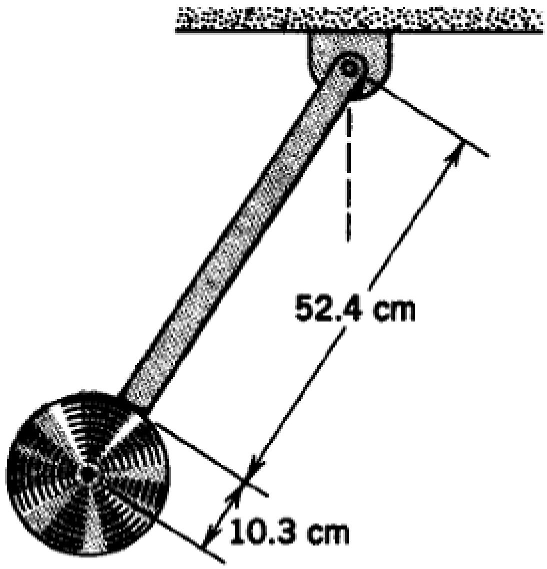
y un periodo

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}}$$



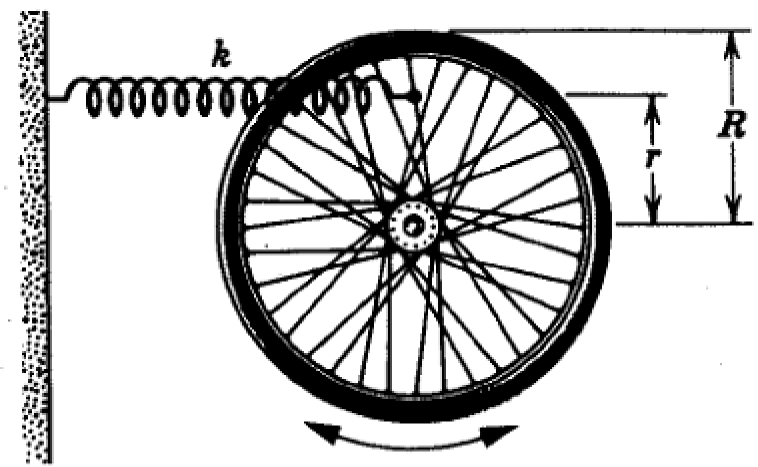
6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

11. Un péndulo consta de un disco uniforme de 10.3cm de radio y 488g de masa unido a una barra de 52.4cm de longitud que tiene una masa de 272g, tal como se muestra en la figura anexa. (a) Calcule la inercia rotatoria (o momento de inercia) del péndulo respecto al pivote. (b) ¿Cuál es la distancia entre el pivote y el centro de masa del péndulo? (c) Calcule el periodo de oscilación para ángulos pequeños.



6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

12. Una rueda puede girar en torno a su eje fijo. Se une un resorte a uno de sus rayos a una distancia r del eje, como se muestra. Suponiendo que la rueda sea un aro de masa M y radio R, obtenga la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de este sistema en términos de M, R, r y la constante de fuerza k. Discuta los casos especiales cuando $r=R$ y $r=0$.



6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

13. Un péndulo simple está formado por una lenteja de masa M=300g unida a una varilla ligera de longitud L=50.0cm. El péndulo se pone a oscilar, observándose que al tiempo t=0.25s, el ángulo que forma con la vertical es de 0.145rad moviéndose con una rapidez angular de 0.164rad/s. Encuentra (a) una expresión para la posición angular del péndulo en función del tiempo; y (b) la energía mecánica del péndulo.

(a) De la expresión general del Movimiento Armónico Simple realizado por un péndulo

$$\theta(t) = \theta_{\max} Cos\left(\Omega_0 t + \phi\right)$$

se tiene que

$$\omega(t) = -\theta_{\max}\Omega_0 Sen\left(\Omega_0 t + \phi\right)$$

donde

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.80665\, {}^{m}\!/_{s^2}}{0.50m}} = 4.42869\, {}^{rad}\!/_{s}$$

6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

13. Un péndulo simple está formado por una lenteja de masa M=300g unida a una varilla ligera de longitud L=50.0cm. El péndulo se pone a oscilar, observándose que al tiempo t=0.25s, el ángulo que forma con la vertical es de 0.145rad moviéndose con una rapidez angular de 0.164rad/s. Encuentra (a) una expresión para la posición angular del péndulo en función del tiempo; y (b) la energía mecánica del péndulo.

Con lo anterior, tenemos

$$0.145rad = \theta_{\max} Cos\left[\left(4.42869 \, {}^{rad}\!/_{s}\right)(0.25s) + \phi\right]$$

y

$$0.164 \, {}^{rad}\!/_{s} = -\theta_{\max}\left(4.42869 \, {}^{rad}\!/_{s}\right) Sen\left[\left(4.42869 \, {}^{rad}\!/_{s}\right)(0.25s) + \phi\right]$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera se tiene

$$-1.131034483 \, {}^{rad}\!/_{s} = \left(4.42869 \, {}^{rad}\!/_{s}\right)\tan\left[\left(4.42869 \, {}^{rad}\!/_{s}\right)(0.25s) + \phi\right]$$

6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

13. Un péndulo simple está formado por una lenteja de masa M=300g unida a una varilla ligera de longitud L=50.0cm. El péndulo se pone a oscilar, observándose que al tiempo t=0.25s, el ángulo que forma con la vertical es de 0.145rad moviéndose con una rapidez angular de 0.164rad/s. Encuentra (a) una expresión para la posición angular del péndulo en función del tiempo; y (b) la energía mecánica del péndulo.

de donde

$$\phi = -1.357215801 rad$$

que podemos sustituir en la ecuación de la posición angular

$$0.145 rad = \theta_{\max} Cos\left[\left(4.42869\, {rad}/{s}\right)(0.25 s) - 1.357215801 rad\right]$$

para obtener

$$\theta_{\max} = 0.149653983 rad$$

6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

13. Un péndulo simple está formado por una lenteja de masa M=300g unida a una varilla ligera de longitud L=50.0cm. El péndulo se pone a oscilar, observándose que al tiempo t=0.25s, el ángulo que forma con la vertical es de 0.145rad moviéndose con una rapidez angular de 0.164rad/s. Encuentra (a) una expresión para la posición angular del péndulo en función del tiempo; y (b) la energía mecánica del péndulo.

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de poder escribir la expresión de la posición angular como

$$\theta(t) = \left(0.149653983rad\right) Cos\left[\left(4.42869\, {}^{rad}\!/_{s}\right) t - 1.357215801rad\right]$$

y la rapidez angular como

$$\omega(t) = \left(-0.662771\, {}^{rad}\!/_{s}\right) Sen\left[\left(4.42869\, {}^{rad}\!/_{s}\right) t - 1.357215801rad\right]$$

(b) Una vez encontradas la posición y velocidad angulares, el cálculo de la energía mecánica del sistema es directo y queda como ejercicio para realizar en casa.

6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

En la figura se muestra un péndulo de torsión, que está formado por un objeto suspendido por un hilo o una barra.

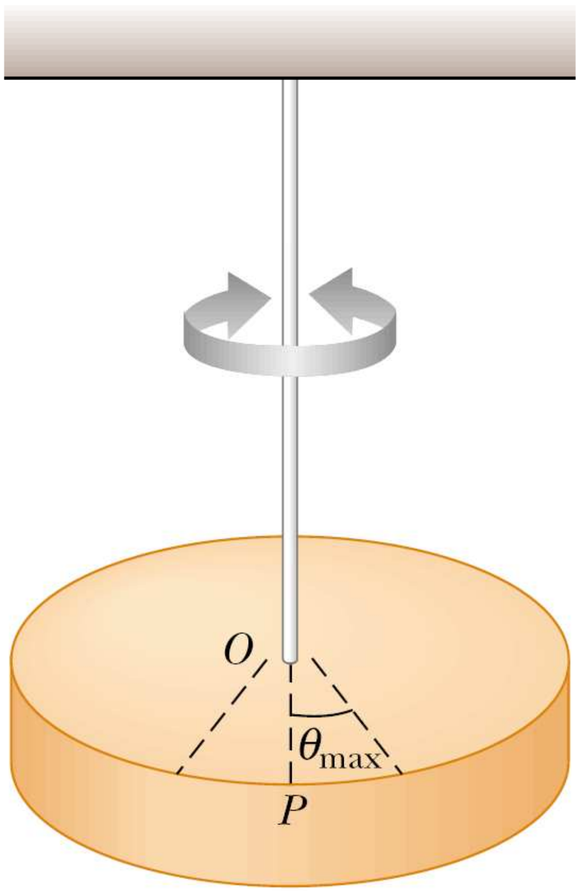
Cuando se tuerce el hilo un cierto ángulo θ, este ejerce una torca restauradora proporcional al ángulo girado, es decir

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde la constante de proporcionalidad κ se denomina constante de torsión.

Si aplicamos la segunda ley de Newton para las rotaciones tenemos

$$\tau = I\alpha \quad \rightarrow \quad -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

La ecuación anterior se puede reescribir como

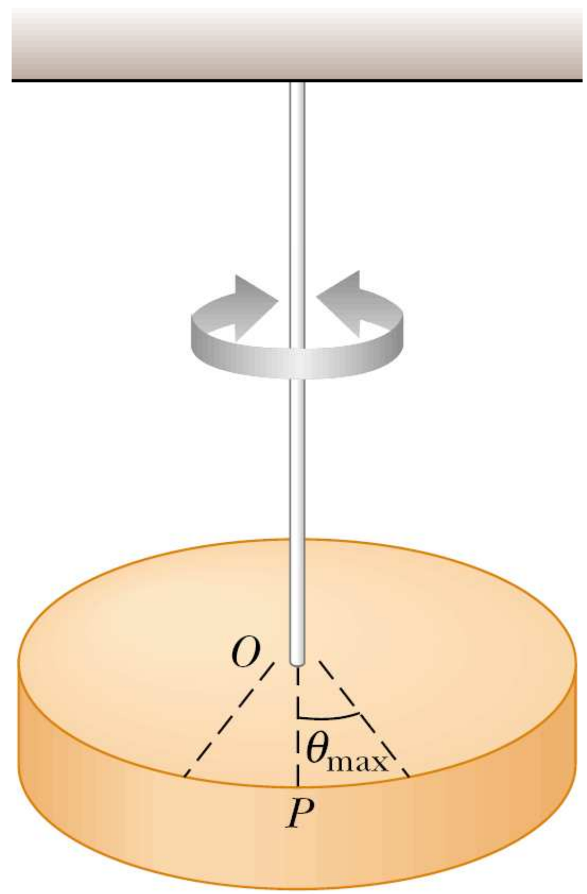
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

que corresponde a la ecuación de un movimiento armónico simple, con una frecuencia de oscilación dada por

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

mientras que el periodo es

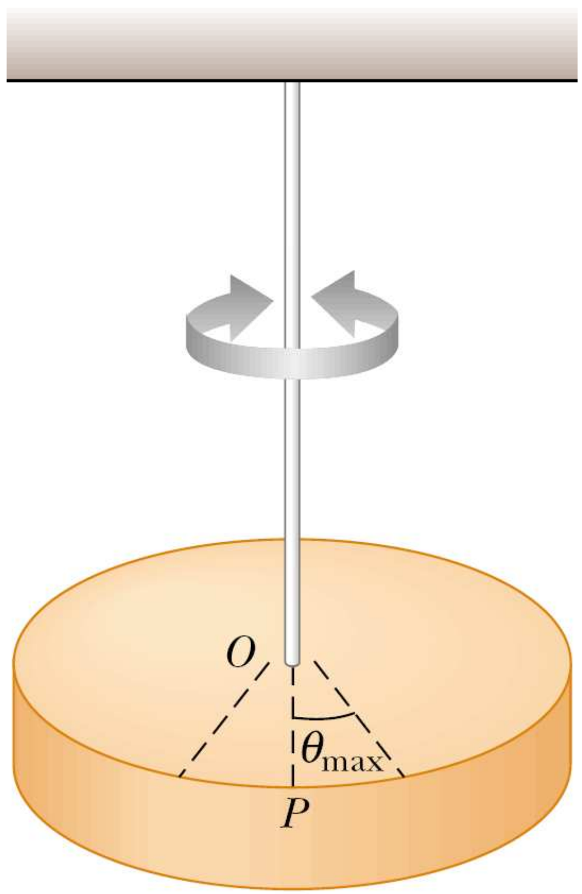
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$



6.- Péndulos simple, físico y de torsión.

Antes de concluir, es importante notar que para el caso de un péndulo de torsión, no ha sido necesario usar la aproximación de oscilaciones pequeñas, por lo que siempre que no excedamos el límite elástico del hilo, la ecuación de movimiento será

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta}$$



Lo que permite establecer que un péndulo de torsión realizará un movimiento armónico simple, con una posición angular dada por

$$\boxed{\theta(t) = \theta_{max} Cos\left(\Omega_0 t + \phi\right)}$$

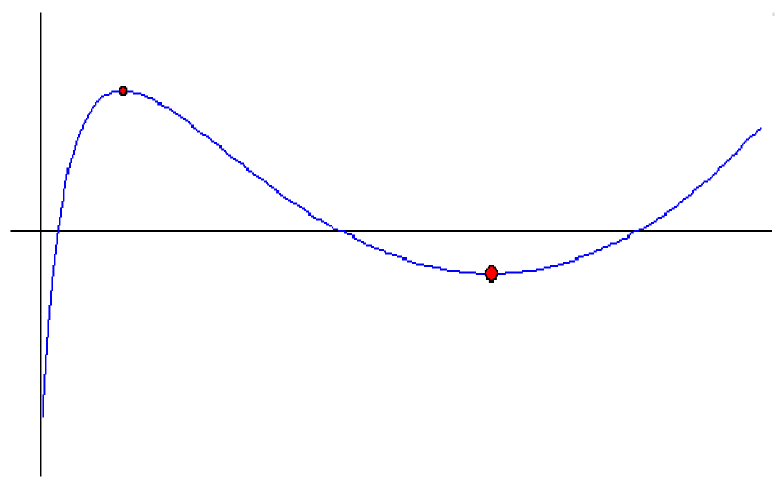
6.- Péndulos simple, físico y de torsión. Ejemplos.

14. Un péndulo de torsión se forma al unir un alambre al centro de una barra de madera de 1.0m de largo y cuya masa es de 2.00kg. Si el periodo de oscilación resultante es de 3.00min, ¿cuál es la constante de torsión para el alambre?

7.- Movimiento general en las proximidades del equilibrio.

Hasta este momento hemos visto que si una partícula tiene una aceleración proporcional al desplazamiento experimentado con relación a un punto fijo, pero dirigida hacia dicho punto, su movimiento será armónico simple.

Si ahora analizamos el movimiento de una partícula cuya energía potencial $U(x)$ puede ser más o menos como la de la figura anexa, el punto que centrará nuestro interés es aquel en que la función $U(x)$ toma un valor mínimo, es decir un punto donde la fuerza que actúa sobre la partícula, es nula.



Dicho punto corresponde al llamado equilibrio estable, mientras que el otro punto señalado en la gráfica corresponde a un equilibrio inestable.

7.- Movimiento general en las proximidades del equilibrio.

En lo que sigue, consideraremos el movimiento de una partícula alrededor de un punto de equilibrio estable, $x_{\min}$.

Para los puntos cercanos a dicho punto, es posible hacer un desarrollo en series de potencias de la función potencial, $U(x)$.

En tal caso tenemos que

$$U(x) = U(x_{\min}) + \left[\frac{dU}{dx}\right]_{x=x_{\min}} (x - x_{\min}) + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=x_{\min}} (x - x_{\min})^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3U}{dx^3}\right]_{x=x_{\min}} (x - x_{\min})^3 + \cdots$$

Si $x_{\min}$ corresponde a una posición de equilibrio, debe cumplirse que

$$-\left[\frac{dU}{dx}\right]_{x=x_{\min}} = F(x_{\min}) = 0$$

$F(x)$ será una fuerza si x es una distancia, ¿por qué?

7.- Movimiento general en las proximidades del equilibrio.

Además, si x_{min} corresponde a un punto de equilibrio estable, la energía potencial debe tener un mínimo en dicho punto, por lo que

$$\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=x_{\min}} > 0$$

Finalmente, si consideramos el caso de oscilaciones pequeñas, o lo que es lo mismo $(x\text{-}x_{min})<<1$, en el desarrollo en serie podemos despreciar los términos de orden superior a x^2, con lo que tendremos que

$$U(x) \approx U(x_{\min}) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=x_{\min}} \left(x - x_{\min}\right)^2$$

donde siempre podemos tomar arbitrariamente $U(x_{min})=0$.

Lo anterior nos permite concluir que pequeños desplazamientos en torno a una posición de equilibrio estable, conducen siempre, con bastante aproximación a una energía potencial de forma parabólica, tal como en el sistema masa resorte, y por lo tanto, a un MAS.

7.- Movimiento general en las proximidades del equilibrio.

Considerando la expresión anterior para $U(x)$, podemos calcular la fuerza asociada

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

tal que

$$F(x) = -\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=x_{\min}} \left(x - x_{\min}\right)$$

Lo que lleva a una ecuación de movimiento de la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=x_{\min}} \left(x - x_{\min}\right)$$

de donde la frecuencia de oscilación ω asociada al movimiento de un objeto de masa m, en las proximidades de un punto de equilibrio estable, resulta ser

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=x_{\min}}}$$

8.- Oscilaciones amortiguadas.

9.- Oscilaciones forzadas y resonancia.

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano