

Oscilaciones libres

- 8.1 Introducción
- 8.2 Oscilador mecánico
- 8.3 Exponenciales complejos
- 8.4 Condiciones iniciales
- 8.5 Oscilador armónico simple
- 8.6 Energía de un oscilador armónico
- 8.7 Oscilador eléctrico

8.1 Introducción

Muchos fenómenos habituales son periódicos, los latidos del corazón de las personas, el movimiento del péndulo de un reloj de pared o las vibraciones de una cuerda de guitarra, por ejemplo. A escala microscópica, los iones de un cristal de NaCl oscilan alrededor de su posición de equilibrio, o también los átomos en una molécula. En los circuitos eléctricos de una instalación doméstica, la tensión y la corriente varían periódicamente con el tiempo. Tal variedad de fenómenos hace que el estudio de este tipo de movimiento sea importante.

8.2 Oscilador mecánico

Nuestro interés se centra ahora en el movimiento ligado de una partícula en el entorno de una posición de equilibrio estable; su energía potencial puede ser más o menos como la de la figura. 8.1. Focalizamos el interés en el entorno del punto $x = x_0$ en que la función $U(x)$ toma un valor mínimo; es decir, el punto en que la fuerza que actúa sobre la partícula es nula. Una partícula colocada con velocidad nula en ese punto, permanecería en reposo; es un punto de equilibrio estable. Vamos a estudiar el tipo de movimiento de una partícula en las proximidades de un punto de equilibrio estable, viendo, para iniciarlo, como cualquier curva de energía potencial $U(x)$ puede aproximarse por una parábola para pequeñas separaciones de la posición de equilibrio, $x = x_0$

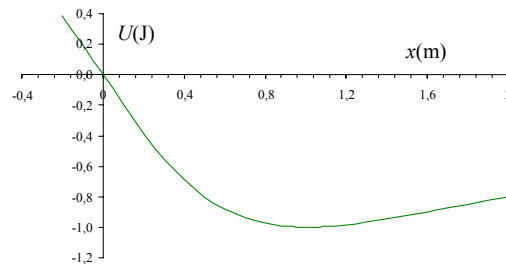


Fig. 8.1 Energía potencial de una partícula con una posición de equilibrio estable en $x = 0$

La parábola es de la forma:

$$U(x) = B + C(x - x_0)^2$$

donde B y C son constantes; B es el valor de la energía potencial en la posición de equilibrio $x = x_0$, $U(x_0) = B$ y como $F = -dU/dx = -2C(x - x_0)$, C es tal que $2C = k$ y $|d^2U/dx^2|_{x_0} = 2C = k$

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2U}{dx^2} \right]_{x_0} (x - x_0)^2 \quad (8.1)$$

Opcional

Si ya ha estudiado el desarrollo en serie de potencias de una función, puede establecer la aproximación desarrollando $U(x)$ en serie de Taylor, es decir en torno de $x = x_0$, tenemos

$$U(x) = U(x_0) + \left[\frac{dU}{dx} \right]_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2U}{dx^2} \right]_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left[\frac{d^3U}{dx^3} \right]_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots$$

donde el subíndice x_0 indica: valor de la derivada en $x = x_0$. Si x_0 corresponde a una posición de equilibrio, debe cumplirse que

$$-\left[\frac{dU}{dx}\right]_{x_0} = F(x_0) = 0$$

donde $F(x)$ será una fuerza si x es una distancia. Si esta posición de equilibrio debe corresponder a un equilibrio estable la energía potencial debe de tener un mínimo en $x = 0$, y por lo tanto

$$\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x_0} > 0$$

Si consideramos el caso de pequeñas oscilaciones, o lo que es lo mismo $|x - x_0| \ll 1$, en el desarrollo en serie podemos despreciar los términos en $(x - x_0)^3$ y siguientes, y tendremos

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2U}{dx^2} \right]_{x_0} (x - x_0)^2 \quad (8.1)$$

donde siempre podemos tomar arbitrariamente $U(x_0) = 0$.

En la gráfica de la figura 8.2 se ha trazado, en línea discontinua, la parábola que aproxima a la $U(x)$ de la figura en el entorno de la posición de equilibrio estable $x = 1$, se observa claramente que la aproximación será válida sólo si $|x - 1| \ll 1$. En la figura 8.3, se ha representado el nivel de energía mecánica de la partícula, $E = -0,98 \text{ J}$, en la gráfica ampliada de $U(x)$ en el entorno de x_0 ; puede apreciarse que la parábola se aproxima aceptablemente bien a $U(x)$ en el intervalo de valores de x en el que la partícula podrá moverse para este nivel de energía.

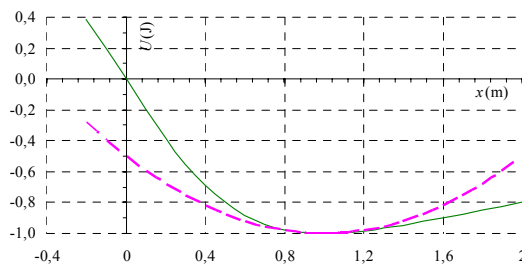


Fig. 8.2 $U(x)$ y la aproximación parabólica

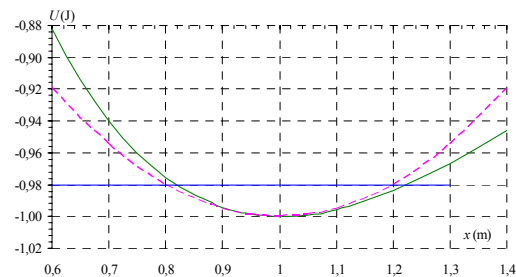


Fig. 8.3 Nivel de energía y aproximación parabólica

Vemos, pues, que *pequeños desplazamientos en torno de una posición de equilibrio estable conducen siempre, en buena aproximación, a una energía potencial de la forma parabólica dada por (8.1)*. Derivando $U(x)$ obtenemos la fuerza $F(x) = -k(x - x_0)$, es decir existe una fuerza restauradora o, lo que es lo mismo, una fuerza que tiende a llevar la partícula hacia la posición de equilibrio. *Como consecuencia de esta relación lineal entre la respuesta y la solicitud, se podrá aplicar el principio de superposición en el caso de existir varias solicitudes.*

Conceptualmente siempre podemos elegir $x_0 = 0$ y $U(x_0 = 0) = 0$ con lo que las expresiones de la fuerza y de la energía potencial quedan en la forma más simple:

$$F(x) = -kx \quad (8.2)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.3)$$

La forma idealizada más simple de un movimiento periódico viene dada por un sistema físico constituido por una masa sujeta al extremo de un muelle. Supondremos que la masa del muelle es despreciable y que todo el sistema está montado sobre una superficie horizontal sin rozamiento, de tal manera que la masa m puede deslizar libremente sobre ella. El muelle, cuando se deja libre, tiene una longitud natural para la que no ejerce ninguna fuerza sobre m , es la llamada posición de equilibrio. Si movemos la masa estirando o comprimiendo el muelle, éste ejerce una fuerza sobre m que tiende a devolver, a restaurar, la posición de equilibrio. Si el muelle es elástico, es decir obedece la ley de Hooke, la fuerza

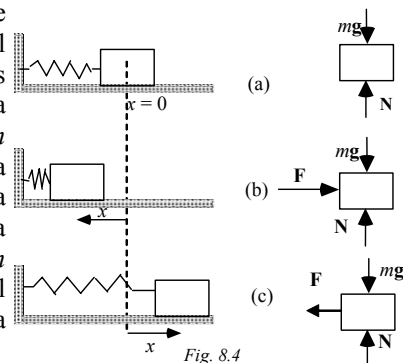


Fig. 8.4

restauradora será lineal y puede escribirse como la ec. (8.2) donde la coordenada x corresponde a la deformación del muelle y debe, por lo tanto, medirse desde la posición de equilibrio. La constante de proporcionalidad k se denomina constante elástica del muelle. El signo menos aparece porque el vector fuerza es opuesto en dirección al vector desplazamiento $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$. En la figura 8.4 se muestra la posición de equilibrio (a), una posición con el muelle comprimido (b) y una tercera con el muelle estirado (c); a la derecha se han representado los diagramas de las fuerzas que actúan sobre m en las tres situaciones.

Como la superficie horizontal impide el movimiento vertical, no hay aceleración vertical y por lo tanto $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0$. Como el movimiento ocurrirá según la dirección x , no es preciso mantener la notación vectorial. La fuerza $F = -kx$ actuando sobre m hará que tenga una aceleración que, según la segunda ley de Newton, cumplirá

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

es decir

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad (8.4.a)$$

la aceleración de m es proporcional al desplazamiento y de sentido contrario. Reordenamos (8.4.a) como

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0} \quad (8.4.b)$$

La ecuación 8.4.b constituye un ejemplo de lo que se denomina ecuación diferencial, ya que envuelve derivadas. Las soluciones de esta ecuación son funciones $x(t)$ que satisfacen dicha ecuación. Las funciones del tiempo, $x(t)$, deben ser tales que derivando dos veces debe dar por resultado la misma función multiplicada por $-k/m$, como se pone de manifiesto en la ecuación 8.4.a. Funciones seno, coseno o exponencial del tiempo satisfarán esa condición. Probemos una función de la forma $Ae^{\lambda t}$ para ver si es solución de la ecuación diferencial (8.4.b). Hagámoslo:

Como $dx/dt = \lambda x$ y $d^2 x/dt^2 = \lambda^2 x$ sustituyendo en la ecuación 8.4.b

$$[\lambda^2 + \omega^2]x = 0$$

en la que hemos hecho $k/m = \omega^2$. Como x no es nula para cualquier t , debe ser nulo el paréntesis, por lo que λ debe ser de la forma imaginaria: $\lambda = \pm \omega j$ ($j = \sqrt{-1}$ = unidad imaginaria) y la función solución es de la forma

$$\mathbf{x} = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}$$

donde A_1 y A_2 son constantes; como la ecuación diferencial 8.4.b incluye una derivada segunda deben aparecer dos constantes de integración que se determinan con las condiciones iniciales.

8.3 Exponenciales complejos

Recordando la expresión de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

siendo j la unidad imaginaria, se ve fácilmente que $\mathbf{x}$ se puede escribir también en la forma:

$$\mathbf{x} = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A e^{j\omega t}$$

La amplitud compleja $A = A e^{j\varphi}$ contiene las dos constantes de integración. La función $A e^{j(\omega t + \varphi)}$ es solución de la ecuación diferencial 8.4.b del oscilador armónico y su parte real

$$x = \Re[A e^{j(\omega t + \varphi)}] = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.5)$$

es la función del oscilador armónico. El complejo $\mathbf{x}$ puede interpretarse geométricamente como un vector rotatorio o *fasor*, A , de módulo A y argumento φ , que gira con velocidad angular constante ω , figura 8.5.a. La proyección de A sobre el eje real, $A \cos(\omega t + \varphi)$, es a la que asignamos sentido físico. Desde un punto de vista cinemático es equivalente a imaginar el movimiento armónico simple como proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro. La ventaja de la utilización de los exponenciales

complejos será patente a lo largo del texto, pero veamos ahora la comodidad que ofrece en el cálculo de las derivadas. La derivada de x es

$$v = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega x$$

y la derivada de v

$$a = -\omega^2 A e^{j(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 x$$

Vemos que la derivada de una función exponencial compleja se obtiene sin más que multiplicar la función exponencial por $j\omega$. Multiplicar un complejo por $j\omega$ significa multiplicar su módulo por ω y sumar $\pi/2$ radianes a su argumento. En la figura 8.5.b se muestran los tres complejos x , v y a . Los complejos permiten tratar y visualizar fácilmente los desfases entre posición, velocidad y aceleración. Por supuesto, velocidad y aceleración del punto material que realiza el movimiento armónico simple, vendrán dadas por las partes reales de v y a , respectivamente

$$v = \Re[v] = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.6)$$

$$a = \Re[a] = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.7)$$

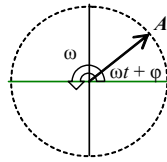


Fig 8.5 a

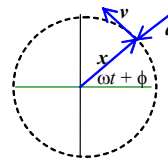


Fig 8.5 b

8.4 Condiciones iniciales

La función del movimiento $x(t)$ puede escribirse en función de las condiciones iniciales del movimiento, posición $x(0)$ y velocidad $v(0)$, en lugar de en función de amplitud y fase, como en la ecuación 8.5. Haciendo en ésta $t = 0$,

$$x(0) = A \cos \varphi \quad (8.8)$$

Haciendo $t = 0$ en la ecuación 8.6 de la velocidad tenemos

$$v(0) = -\omega A \sin \varphi \quad (8.9)$$

como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t$$

se puede escribir

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (8.10)$$

A partir de las ecuaciones 8.8 y 8.9 que relacionan amplitud y fase con $x(0)$ y $v(0)$, podemos obtener A y φ a partir de esas condiciones iniciales. Resolviendo, obtenemos

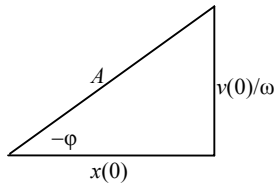


fig. 8.6 Triángulo nemotécnico

$$\varphi = \arctg \frac{-v(0)}{\omega x(0)} \quad (8.11)$$

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}} \quad (8.12)$$

El triángulo de la figura 8.6 permitirá recordar estas expresiones con facilidad

Ejercicio 8.1

La posición de una partícula viene dada por $x(t) = A \cos \omega t$, donde $A = 4,0$ m y $\omega = 2,0$ s⁻¹.

- a) halle la frecuencia y el periodo del movimiento
 b) halle las expresiones de la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo
 c) obtenga la velocidad y la aceleración en el instante inicial, así como sus valores máximos.

R:

a) $f = 1/\pi = 0,32$ Hz; $T = 3,1$ s b) $v(t) = -8,0 \sin 2t$; $a(t) = -16 \cos 2t$
 c) $v(0) = 0$ m/s; $a(0) = -16$ m/s²; $v_{\max} = 8$ m/s; $a_{\max} = 16$ m/s²

Ejercicio 8.2

La figura 8.7 muestra la gráfica de la fuerza que actúa sobre una partícula de masa $m = 0,40$ kg, en función de la posición; en $x \leq 0$, la fuerza es constante, $F = 25$ N.

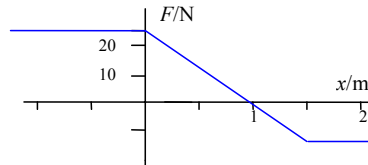


Fig. 8.7

Represente la gráfica de la energía potencial $U(x)$ asociada a esta fuerza. Tome $U(1) = 0$.

Si la partícula posee una velocidad de 3,0 m/s hacia la derecha al pasar por $x = 1,0$ m, ¿qué tipo de movimiento describe?

8.5 Oscilador armónico simple

Resumiendo lo visto hasta ahora, y por extensión, podemos decir que se llama *oscilador armónico simple* a cualquier sistema físico que pueda describirse mediante una sola magnitud, Ψ (psi), que obedezca una ley del tipo

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \omega^2\Psi = 0 \quad (8.13)$$

La magnitud Ψ varía en torno de un valor que corresponde al equilibrio del sistema. El desplazamiento, respecto de su valor de equilibrio, tiene una dependencia temporal del tipo

$$\Psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.14)$$

en donde ya se ha tomado el origen en el valor medio de Ψ alrededor del cual oscila el sistema. En esta expresión A , ω y φ son tres constantes y el tiempo, t , es la variable. A es una constante positiva denominada amplitud; ω es la frecuencia angular o pulsación, que caracteriza la periodicidad temporal del fenómeno y viene medida en rad/s.

Todos los osciladores armónicos tienen las siguientes características:

- i) La amplitud A es constante; esto es lo que indicamos diciendo que la oscilación es simple.
- ii) La frecuencia y, por lo tanto el periodo, es independiente de la amplitud. Oscilaciones grandes y pequeñas tienen el mismo periodo, (isocronismo).
- iii) La dependencia temporal de la cantidad que oscila puede escribirse como una función sinusoidal de una frecuencia única, la oscilación es armónica.

8.6 Energía de un oscilador armónico

En el tema de trabajo y energía potencial considerábamos el caso de una masa unida a un muelle elástico lineal, o sea sometida a fuerza del tipo: $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, donde x indica la deformación del muelle

$$W = -\Delta U = \int_{r_0}^r -kx\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{k}{2} [x^2 - x_0^2]$$

Tomando como referencia $x_0 = 0$, es decir la posición en la que el muelle está sin deformar:

$$U(x) = kx^2/2 \quad (5.6)$$

El cuerpo está en un *pozo de potencial* originado por el muelle. Todo oscilador armónico simple está caracterizado por un pozo de potencial parabólico. Es decir, la energía potencial es proporcional al cuadrado del *desplazamiento respecto al equilibrio*.

En ausencia de rozamiento, la energía mecánica es una magnitud que se conserva. Esto es, la suma de las energías cinética y potencial permanece constante cuando el cuerpo realiza un movimiento armónico simple. Dicho de otra forma, el trabajo *hecho por el muelle* cuando el cuerpo se mueve de una posición x_1 a otra x_2 es igual a la variación de energía cinética

$$-\Delta U(x) = \Delta E_k$$

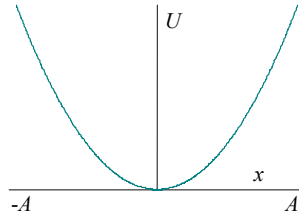


Fig. 8.8 Variación de la energía potencial con la posición

y como x_1 y x_2 son arbitrarios podemos escribir

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} \quad (8.15)$$

Si las condiciones iniciales consisten en dar un desplazamiento inicial $x(0) = A$, soltando el oscilador desde el reposo, $v(0) = 0$, la energía potencial $U(t)$ será, en $t = 0$

$$U(t = 0) = \frac{1}{2}kA^2$$

Esta energía potencial inicial es igual a la energía total, E , del sistema. Para $x = 0$ la velocidad tiene sus valores extremos $\pm v_{\max} = \pm \omega A$, y

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

que expresa que el valor de la energía en la posición de equilibrio, en la que toda la energía es cinética, es igual al valor de la energía en la elongación máxima, en la que toda es potencial.

La energía mecánica de una partícula de masa m que realiza un movimiento armónico simple también puede expresarse en la forma

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (8.16)$$

la energía mecánica es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. La suma de la energía potencial $U(t)$ y de la energía cinética $E_k(t)$ es una constante, pero cada uno de los sumandos es una función del tiempo.

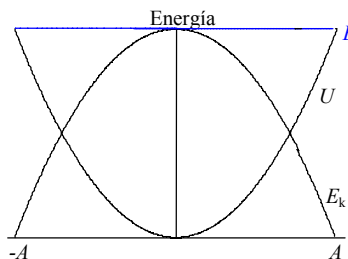


Fig. 8.9 Energía total, E , energía potencial $U(x)$ y energía cinética $E_k(x)$ como funciones de la posición

El promedio temporal de la energía potencial $\langle U(t) \rangle$ es

$$\langle U(t) \rangle = \frac{1}{2}k\langle x^2 \rangle$$

sustituyendo $x(t)$ por $A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\langle U(t) \rangle = \frac{1}{2}k \langle (A\cos(\omega t + \varphi))^2 \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$$

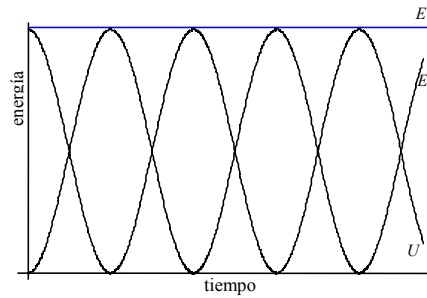


Fig. 8.10 Energía total, E , energía potencial $U(t)$ y energía cinética $E_k(t)$ como funciones del tiempo

El promedio temporal de la energía cinética $\langle E_k(t) \rangle$ es

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle$$

sustituyendo m por k/ω^2 y $v(t)$ por $-\omega A \sin(\omega t + \varphi)$, se obtiene

$$\langle E_k(t) \rangle = (\frac{1}{2}k/\omega^2) \langle (\omega A \sin(\omega t + \varphi))^2 \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle$$

Como $\sin^2(\omega t + \varphi)$ y $\cos^2(\omega t + \varphi)$ son de la misma forma, salvo un desplazamiento de $T/4$, su valor promedio es el mismo e igual a $1/2$ ya que $\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$. Tenemos entonces

$$\langle U(t) \rangle = \langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}E \quad (8.17)$$

La energía está repartida por igual entre cinética y potencial, en valor promedio temporal.

Ejercicio 8.3

Una masa oscila sujeta a un muelle elástico:

a) ¿qué fracción de su energía total está en forma de energía cinética cuando el desplazamiento es la mitad de su amplitud?

b) ¿para qué desplazamiento son iguales sus energías cinética y potencial?

R: a) $E_k = (3/4) E$; b) $x = \pm (\sqrt{2}/2) A$

Ejemplo 8.1

Describe el movimiento de la partícula del ejemplo 6.4, en el caso del apartado b), ahora lo más cuantitativamente que pueda.

Solución

La partícula tiene un movimiento oscilatorio en torno de la posición de equilibrio $x = 1$ m. Podemos aproximar esta oscilación por un movimiento armónico simple de amplitud $A \approx 1 - 0,5 = 0,5$ m; **si se considera $U(x_{\text{equilibrio}}) = 0$, como es usual para describir este movimiento**, entonces

$$\text{Energía} = E - E_{\text{equilibrio}} \approx -1,2 - (-1,6) = 0,4 \text{ J} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

de donde $\omega = 1,3$ rad/s y la ecuación de movimiento sería:

$$x - 1 \text{ m} = (0,5 \text{ m})\cos[(1,3\text{rad/s})t + \pi]$$

Se ha incluido una fase inicial $\varphi = \pi$ al tomar como $t = 0$ el instante en que la partícula está en $x = 0,5$ m

Ejemplo 8.2

En la figura 8.11 se muestra la fuerza $F(x)$ que actúa sobre una partícula de masa m

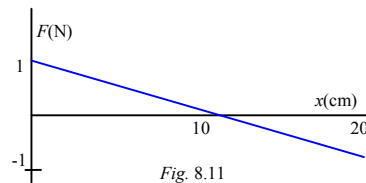


Fig. 8.11

a) trace la gráfica de la energía potencial $U(x)$ de la partícula suponiendo $U(0) = 0$

La partícula tiene una energía mecánica $E = -20$ mJ y en el instante $t = 0$ s en que iniciamos su observación está en $x = 6,0$ cm, moviéndose a $v(0) = 0,2$ i ms⁻¹

b.1) calcule $U(t = 0)$ y $E_k(t = 0)$

b.2) escriba la ecuación del movimiento $x(t)$

Se superpone la acción de una fuerza uniforme $\mathbf{F} = 0,10\mathbf{i}$ N

c.1) trace la gráfica de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula

c.2) ¿tiene sentido hablar de la energía potencial asociada a la fuerza resultante?. Si lo tiene, represéntela

c.3) ¿en qué posición la partícula podría estar en equilibrio?

Solución

a) La gráfica de la fuerza $F(x)$ es una recta de pendiente -10 N/m y de ordenada en el origen $F(x = 0) = 1$ N, su ecuación es pues: $F = (-10 \text{ N/m})x + 1$ N. La energía potencial de la partícula sobre la que actúa esta fuerza será

$$U(x) - U(0) = U(x) = \int_x^0 F(x)dx = - \int_x^0 (-10x + 1)dx = 5x^2 - x$$

La $U(x)$ corresponde a la ecuación de una parábola cuya gráfica se muestra en la figura 8.12

b.1) La energía mecánica de la partícula es una magnitud que se conserva ya que la fuerza es conservativa. En el instante en que se inicia la observación, $t = 0$ s, la partícula está en $x = 0,06$ m con una energía potencial

$$U(t = 0) = U(x = 0,06) = -0,042 \text{ J}$$

moviéndose a $v(0) = 0,2\mathbf{i}$ m/s y como la energía mecánica se conserva $E = U(x) + E_k(x)$

$$-0,02 = -0,042 + E_k(x = 0,06)$$

el valor de la energía cinética es

$$E_k(t = 0) = E_k(x = 0,06) = 0,022 \text{ J}$$

de donde podemos calcular la masa de la partícula

$$m = 2E_k/v^2 = 1,1 \text{ kg}$$

b.2) Si la partícula tiene una energía mecánica $E = -0,02$ J su movimiento está acotado entre: $2 \text{ cm} < x < 18 \text{ cm}$ como se puede apreciar en la figura 8.13, ya que fuera de este intervalo la energía cinética debería ser negativa, cosa imposible. Estos valores se pueden obtener también considerando que en las posiciones extremas toda la energía está en forma de energía potencial y por lo tanto: $-0,02 = 5x^2 - x^*$, las raíces de esta ecuación de segundo grado corresponden a los valores extremos ya apreciados en la figura.

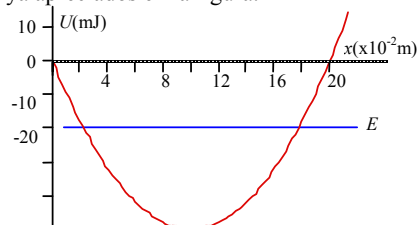


fig. 8.13

Como la energía potencial es una parábola, el movimiento de la partícula es armónico simple en torno de la posición de equilibrio $x = 0,1$ m; como $F = -10x + 1$, la constante elástica vale $k = 10$ N/m y la frecuencia angular del movimiento será

$$\omega = (k/m)^{1/2} = 3 \text{ rad/s}$$

La amplitud del movimiento se obtiene de la diferencia entre las posiciones extremas o por inspección de la gráfica:

$$2A = (18 - 2) \times 10^{-2} \text{ m, de donde } A = 0,08 \text{ m}$$

La ecuación del movimiento con lo que hemos determinado hasta ahora es de la forma

$$x - 0,1 \text{ m} = (0,08 \text{ m}) \cos[(3 \text{ rad/s})t + \varphi]$$

como $x(t=0) = 0,06 \text{ m}$, debe ser $\varphi = \arccos(4/8) = \pm 1 \text{ rad}$; como $v(t=0) = +0,2 \text{ m/s}$, debe ser $\varphi = -1 \text{ rad}$; así:

$$x - 0,1 \text{ m} = (0,08 \text{ m}) \cos[(3 \text{ rad/s})t - 1]$$

c.1) La superposición de una fuerza aplicada constante supone simplemente una traslación de la fuerza anterior

$$F' = -10x + 1 + 0,1 = -10x + 1,1$$

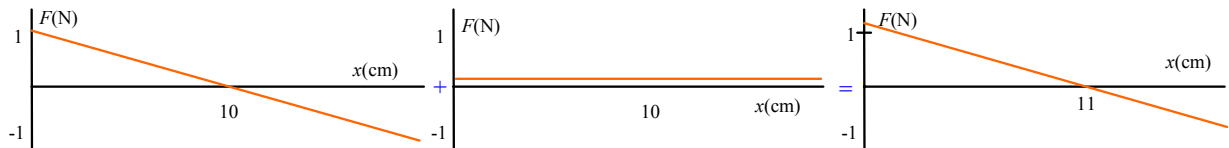


fig. 8.14 Fuerza resultante de la superposición

c.2) Como la nueva fuerza aplicada es constante, también es conservativa; tal que la energía potencial asociada a la fuerza F' es:

$$U'(x) = 5x^2 - 1,1x$$

que corresponde también a la ecuación de una parábola

c.3) La nueva posición de equilibrio está en $x = 11 \text{ cm}$ que corresponde a la posición en que la fuerza es nula.

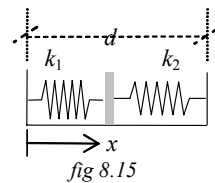
Ejemplo 8.3

Se tiene un sistema formado por una partícula de masa m y dos muelles elásticos de masa despreciable y longitudes naturales l_1 y l_2 tales que $l_1 + l_2 < d$ y constantes elásticas k_1 y k_2 . El movimiento de la partícula está restringido al eje Ox sobre la superficie horizontal lisa, tal como muestra la figura 8.15

- halle la expresión de la fuerza $F(x)$ que actúa sobre la partícula
- obtenga la función energía potencial $U(x)$ y compruebe la relación entre ambas
- determine la posición de equilibrio y discuta su estabilidad
- dé una expresión de la energía potencial en función del desplazamiento Δx respecto de la posición de equilibrio

Para la siguiente aplicación numérica: $m = 10 \text{ g}$, $d = 100 \text{ mm}$, $l_1 = l_2 = 40 \text{ mm}$ y $k_1 = k_2 = 100 \text{ N/m}$

- calcule el trabajo que debe realizarse para desplazar la partícula 10 mm hacia la izquierda desde la posición de equilibrio
- si desde la posición alcanzada en el apartado anterior se suelta la partícula, $t = 0$, escriba la ecuación de su movimiento



Solución

$$a) \Delta x_1 = x - l_1, \Delta x_2 = (d - x) - l_2, \rightarrow F(x) = -k_1(x - l_1) + k_2((d - x) - l_2)$$

$$b) U(x) = \frac{1}{2}k_1(x - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2((d - x) - l_2)^2$$

$$dU/dx = [k_1(x - l_1) + k_2((d - x) - l_2)(-1)] \equiv -F(x)$$

$$c) F(x^*) = 0 \rightarrow -k_1(x^* - l_1) + k_2((d - x^*) - l_2) = 0 \rightarrow x^* = (k_1 l_1 + k_2(d - l_2))/(k_1 + k_2)$$

$$d^2U/dx^2 = k_1 + k_2 > 0 \rightarrow x^* = \text{posición de equilibrio estable}$$

$$d) U(x) = U(x^*) + U'(x^*) \Delta x + \frac{1}{2}U''(x^*) \Delta x^2 + \dots \rightarrow U(\Delta x) = U(x) - U(x^*) \approx \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\Delta x^2$$

e) $W = -\Delta U(\Delta x) = -(2 \times 10^2)(\pm 10 \times 10^{-3})^2 = -2,0 \times 10^{-2} \text{ J}$, se ha incluido el signo $\pm$ para indicar que es indiferente que el desplazamiento sea hacia la izquierda o hacia la derecha de la posición de equilibrio

$$f) k_{\text{equivalente}} = [d^2U/dx^2]_{x=x^*} = k_1 + k_2 = 2k = 200 \text{ N/m}, \omega^2 = k/m = 200/10 \times 10^{-3} = 2,0 \times 10^4, \omega = 1,4 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

$$A = |\Delta x| = 10 \text{ mm}$$

$$x(t) = x^* + A \cos(\omega t + \varphi), x(0) = x^* - A \rightarrow \cos \varphi = -1, \varphi = -\pi$$

$$x^* = (k_1 l_1 + k_2(d - l_2))/(k_1 + k_2) = (k_1 l_1 + k_1(d - l_1))/(k_1 + k_1) = d/2 = 50 \text{ mm}$$

$$x(t) = 50 \text{ mm} + (10 \text{ mm}) \cos((1,4 \times 10^2 \text{ rad/s})t - \pi) = 50 \text{ mm} - (10 \text{ mm}) \cos((1,4 \times 10^2 \text{ rad/s})t)$$

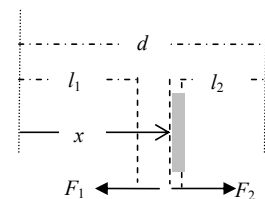


Fig 8.16

8.7 Oscilador eléctrico

Al iniciar el tema se ha escrito que cualquier sistema físico que obedezca una ley del tipo expresado por la ecuación diferencial 8.3 se llama oscilador armónico simple. Inicialmente, se ha tratado con un sistema mecánico idealizado en el que la variable $\Phi(t)$ representaba la posición, $x(t)$, de una partícula de masa m unida a un resorte lineal, de módulo elástico k y masa despreciable.

Un sistema eléctrico formado por una bobina de resistencia despreciable y coeficiente de autoinducción L , conectada a las placas de un condensador de capacidad C , como se muestra en la figura 8.17, constituye un sistema que oscila armónicamente. En cualquier instante, la diferencia de potencial entre las placas del condensador es $q(t)/C$. En la bobina

$$V = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

tensión que, según la ley de Kirchhoff, iguala a la del condensador

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (8.18)$$

del tipo de la ecuación 8.13 siempre que

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (8.19)$$

En el movimiento de las cargas eléctricas, el coeficiente de autoinducción representa el papel de una inercia, mientras que $1/C$ el de una rigidez que se opone a la acumulación de las cargas en las armaduras del condensador. La solución de la ecuación 8.18 es de la forma

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

En el oscilador eléctrico suele ser práctico trabajar con la corriente eléctrica $i(t)$, o rapidez de variación de la carga del condensador con el tiempo

$$i(t) = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi) = i_0 \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

La energía del sistema permanece constante y solamente se intercambia entre dos formas: energía almacenada en forma de campo magnético en la bobina y energía almacenada en forma de campo eléctrico en el condensador

$$\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2C} q^2 = \text{constante}$$

La energía almacenada en forma de campo eléctrico en el condensador es análoga a la almacenada en forma de energía potencial en el resorte de un oscilador mecánico; la energía almacenada en forma de campo magnético en la bobina es análoga a la energía cinética.

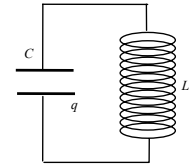


Fig. 8.17

9 Oscilaciones libres amortiguadas

9.1 Oscilador amortiguado

9.2 Amortiguamiento débil

9.3 Casos sobrearmortiguado y crítico

9.3.1 Caso sobrearmortiguado

9.3.2 Amortiguamiento crítico

9.4 Energía de un oscilador débilmente amortiguado

9.5 Circuito RLC

En un oscilador armónico simple, la partícula oscilaría indefinidamente. En cualquier situación real se observa que la amplitud decrece con el tiempo, es decir siempre existen fenómenos irreversibles (rozamiento, resistencia, ...) que disipan una cantidad de energía del oscilador, amortiguando la oscilación. Estos fenómenos son, generalmente, de interpretación complicada y varía según el sistema objeto de estudio. La forma más simple de traducirlos es, en un oscilador mecánico, mediante la introducción de una fuerza de rozamiento viscoso, o sea una fuerza proporcional a la velocidad de desplazamiento $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. En un oscilador eléctrico, circuito LC, la carga del condensador oscilaría indefinidamente, pero siempre existen fenómenos irreversibles, como resistencia óhmica, radiación electromagnética, que disipan una cantidad de energía del oscilador, amortiguando la oscilación. Como modelo más simple, la pérdida de energía se realiza a través de la resistencia del circuito, que la traducimos mediante la introducción de la resistencia óhmica del circuito en la que se produce una caída de potencial igual a Ri , magnitud análoga a la fuerza viscosa bv .

9.1 Oscilador amortiguado

La ecuación diferencial tipo es, ahora, de la forma:

<i>Oscilador mecánico</i> $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (9.1)$	<i>Oscilador eléctrico</i> $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (9.2)$
--	--

ecuación diferencial lineal, lo que permite un estudio matemático relativamente sencillo.

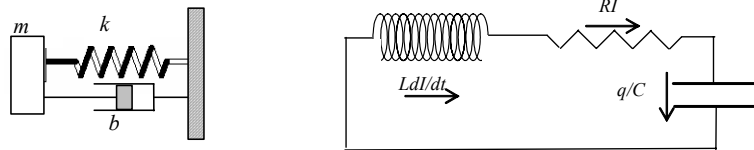


Fig 9.1 Sistemas análogos, osciladores mecánico y eléctrico

Dividiendo ambos miembros de la ecuación 9.1 por m

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

hacemos los cambios:

$$b/m = 1/\tau \quad (9.3)$$

$$k/m = \omega_0^2 \quad (9.4)$$

donde τ es una constante que tiene dimensiones de tiempo y ω_0 corresponde a la frecuencia propia o frecuencia que tendría el oscilador en ausencia de amortiguamiento. Fijémonos que el producto $\omega_0 \tau$ es adimensional; jugará un papel importante, como veremos más adelante. Con el cambio se tiene

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \quad (9.5)$$

que sustituye a la ecuación diferencial del oscilador armónico cuando existe un fenómeno de disipación de energía caracterizado por la constante τ . Escrita esta ecuación así, describe el comportamiento de cualquier oscilador de la clase que sea, dependiendo de lo que represente x , distancia ángulo, tensión, carga eléctrica, ... ; para cualquier clase podremos definir ω_0 y τ . En el circuito serie RLC, ecuación 9.2, dividiendo ambos miembros por L , haríamos $\tau = L/R$ y $\omega_0^2 = 1/LC$

Anteriormente hemos visto que una función de la forma $Ae^{\lambda t}$ era solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico, encontrando que $\lambda = \pm \omega j$ de tal manera que la función $Ae^{j(\omega t + \phi)}$ era solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico y su parte real

$$\Re[Ae^{j(\omega t + \phi)}] = A \cos(\omega t + \phi)$$

era la función del oscilador armónico. Como la ecuación diferencial que tenemos ahora es también lineal, podemos repetir el procedimiento de ensayar una función de la forma $Ae^{\lambda t}$ como solución de la ecuación 9.5. Sustituyendo las derivadas $dx/dt = \lambda x$ y $d^2x/dt^2 = \lambda^2 x$ en la ecuación 9.5

$$[\lambda^2 + \lambda/\tau + \omega_0^2]x = 0$$

Como x no es nula para cualquier t , debe ser nulo el término entre paréntesis

$$\lambda^2 + \lambda/\tau + \omega_0^2 = 0 \quad (9.6)$$

Esta ecuación proporciona dos soluciones independientes, salvo en el caso en que tenga una raíz doble:

$$\lambda_{\pm} = -(1/2\tau) \pm [(1/4\tau^2) - \omega_0^2]^{1/2} \quad (9.7 \text{ y } 9.8)$$

Podemos considerar tres casos separadamente, según que el término $(1/4\tau^2) - \omega_0^2$ sea positivo, negativo o nulo, dependiendo de los valores de ω_0 y $1/2\tau$.

9.2 Amortiguamiento débil, $[(1/4\tau^2) - \omega_0^2 < 0 \text{ y } \omega_0\tau \gg 0,5]$

Empezamos considerando el caso en que dicho término sea negativo, para ello debe ser $\omega_0 > 1/2\tau$, introducimos la cantidad ω , que tiene dimensiones de frecuencia y tal que

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 1/4\tau^2 \quad (9.9)$$

Así las raíces de la ecuación 9.6 se pueden escribir en la forma $\lambda_{\pm} = -(1/2\tau) \pm \omega j$, y la solución de la ecuación 9.5 es:

$$x(t) = A \exp[-(1/2\tau) \pm \omega j]t$$

$$x(t) = \Re \{A \exp[-(1/2\tau) \pm \omega j]t\} = A e^{-t/2\tau} \Re \{A \exp[(\pm \omega j)t]\} = A e^{-t/2\tau} \cos \omega t$$

Como no hemos precisado el origen de tiempos una solución más general será

$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (9.10)$$

de esta manera la función solución depende de dos constantes A y ϕ_0 a determinar imponiendo las condiciones iniciales que satisface el oscilador. Esta ecuación se puede escribir igualmente como

$$x = e^{-t/2\tau} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \quad (9.11)$$

Las constantes de integración A_1 y A_2 se determinan con las condiciones iniciales del movimiento. Así, en función de la posición inicial $x(0)$ y de la velocidad inicial, $(dx/dt)_{t=0} = v(0)$, la solución (9.11) deberá cumplir

$$x(0) = A_1$$

$$v(0) = -x(0)/2\tau + \omega A_2$$

Sustituyendo los valores de A_1 y A_2 en la ecuación (9.11) se tiene:

$$x(t) = e^{-t/2\tau} \left(x(0) \cos \omega t + \left(v(0) + \frac{x(0)}{2\tau} \right) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \quad (9.12)$$

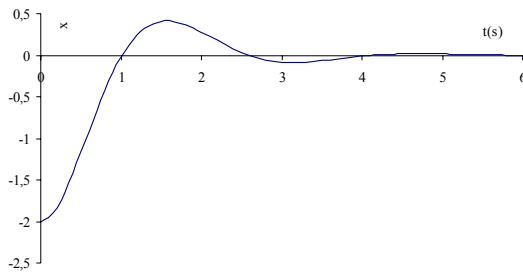


fig 9.2 a

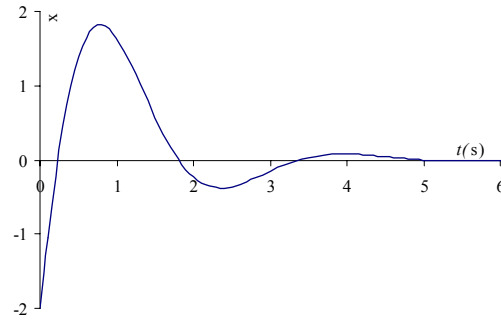


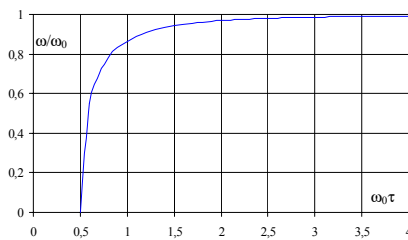
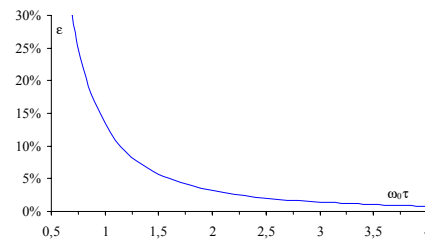
fig 9.2.b

Las figuras 9.2 corresponden al mismo oscilador de $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ y $\tau = 0,5 \text{ s}$, pero con condiciones iniciales diferentes. En la figura 9.2.a: $x(0) = -2$ y $v(0) = 0$ y en la 9.2.b $x(0) = -2$ y $v(0) = 10$ en unidades arbitrarias

Como estamos considerando el caso $\omega_0\tau \gg 0,5$, podemos dar otra expresión de ω , introduciendo el número adimensional $Q = \omega_0\tau$ que depende únicamente de los parámetros físicos que definen el oscilador. Recibe el nombre de **factor de calidad del oscilador** y posteriormente veremos su interés, así como una definición general.

$$\omega = \omega_0(1 - 1/4\omega_0^2\tau^2)^{1/2} = \omega_0(1 - 1/4Q^2)^{1/2} \approx \omega_0(1 - 1/8Q^2) \quad (9.13)$$

que para $Q \gg 1$, se puede tomar ω aproximadamente igual a ω_0

fig 9.3.a ω/ω_0 en función de $\omega_0\tau$ fig 9.3.b error: $(\omega - \omega_0)/\omega_0$ en función de $\omega_0\tau$

En la tabla 9.1 podemos ver el error que se comete al tomar $\omega = \omega_0$, según el valor de $\omega_0\tau$.

Tabla 9.1 $\Delta\omega/\omega_0$ en % en función de $\omega_0\tau$

$\omega_0\tau$	Error %
2	3
5	0,5
10	0,13
25	0,02

Si no existiera el término $e^{-t/2\tau}$ la solución sería un oscilador armónico de frecuencia ω , menor que la frecuencia ω_0 de la oscilación no amortiguada. Es decir, el rozamiento retarda el movimiento. La solución representa una oscilación de periodo $T = 2\pi/\omega$; la consecuencia más importante del amortiguamiento está en que la amplitud decrece exponencialmente con el tiempo

$$A(t) = A(0)e^{-t/2\tau} \quad (9.14)$$

con una constante de tiempo igual a 2τ . En un periodo la amplitud decrece en un factor

$$\frac{A(t+T)}{A(t)} = e^{-T/2\tau}$$

tomando logaritmos tenemos

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{T}{2\tau} = \delta \quad (9.15)$$

Este logaritmo de la relación entre la amplitud en un instante y la amplitud después de un periodo, recibe el nombre de *decremento logarítmico*. Su medida en una gráfica de la oscilación permite el cálculo del tiempo de relajación del oscilador. Para que la medida sea más precisa es mejor comparar las amplitudes para un número mayor de periodos; para n periodos

$$n\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)}$$

Calculemos, por ejemplo, el tiempo t^* , que tardaría un oscilador en reducir su amplitud a un 2 % de su valor inicial, sería

$$t^* = 2\tau \ln(100/2) = 7,8\tau$$

y el número de oscilaciones que realizaría en ese tiempo sería

$$t^*/T = 2\tau \ln 50 (\omega/2\pi) = 1,2\tau\omega$$

Si fuera, $1/2\tau = 0,1\omega_0$, o lo que es equivalente $Q = 5$, el número de oscilaciones sería aproximadamente seis.

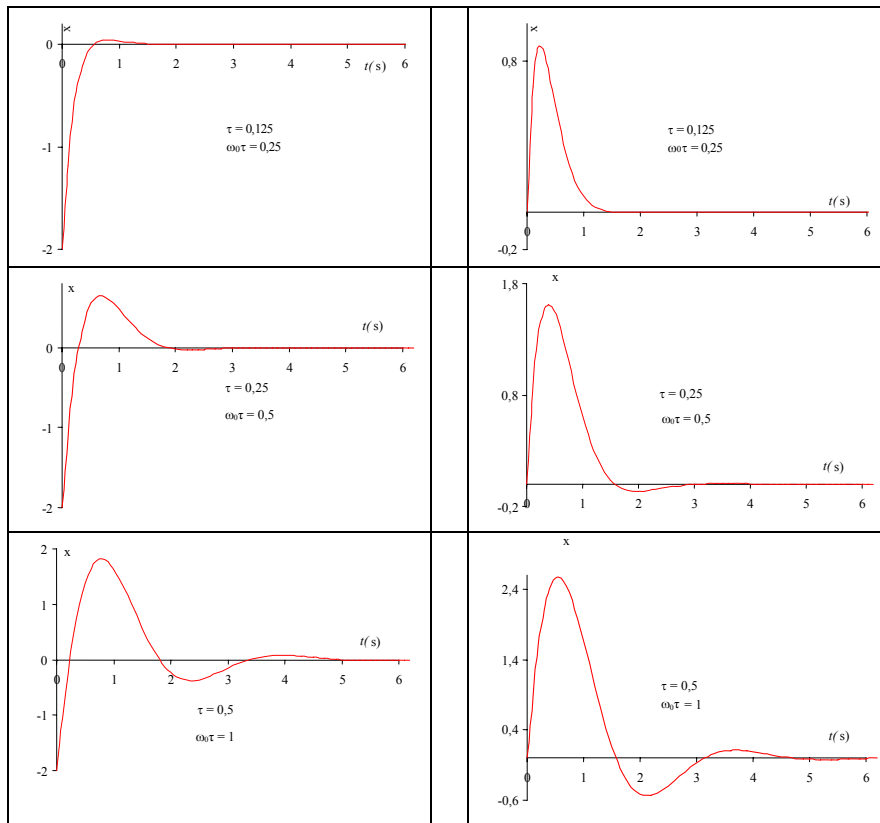


fig 9.6 Las gráficas de la columna de la izquierda corresponden a los tres tipos posibles de solución de la ecuación característica obtenidas variando sólo el tiempo de relajación. En la columna de la derecha se han variado solamente las condiciones iniciales respecto a las de la izquierda.

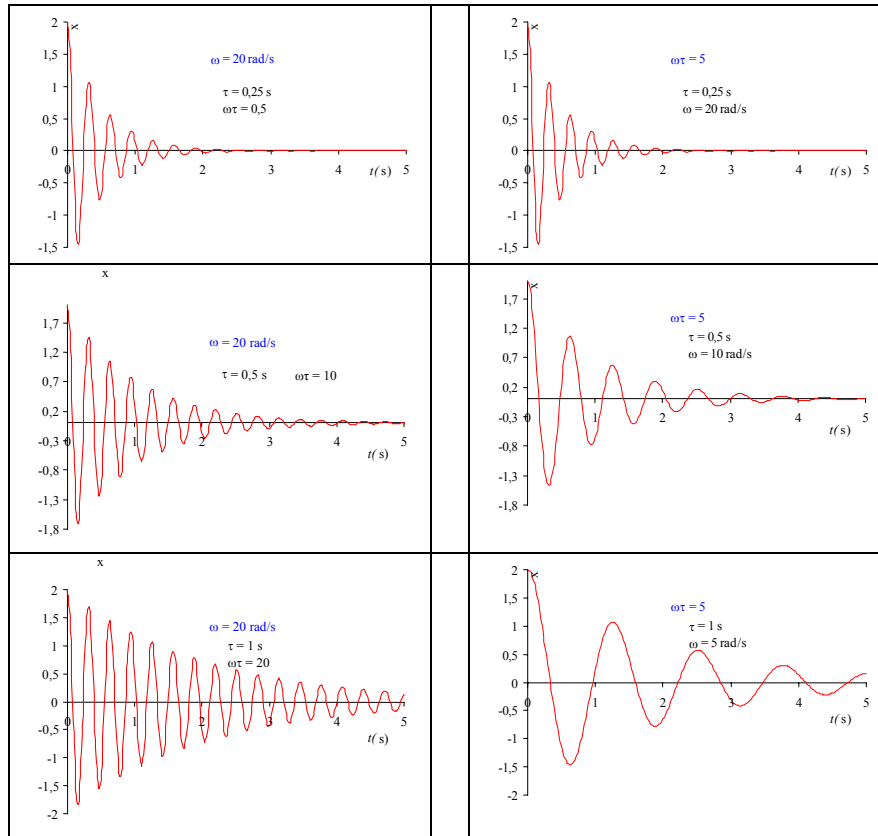


fig 9.7 Las gráficas de la columna de la izquierda corresponden a tres tipos posibles de oscilaciones obtenidas variando sólo el tiempo de relajación. En la columna de la derecha se varían τ y ω manteniendo constante su producto.

9.3 Casos sobreamortiguado y crítico

9.3.1 Caso sobreamortiguado

En este caso $(1/4\tau^2) - \omega_0^2 > 0$ y por lo tanto λ_+ y λ_- son raíces reales, con lo que la forma exponencial de la solución es real para ambas raíces. Introduciendo la cantidad

$$\beta = (1/4\tau^2 - \omega_0^2)^{1/2} < 1/2\tau$$

escribimos para λ_+

$$e^{-(\beta + 1/2\tau)t}$$

y para λ_-

$$e^{-(-\beta + 1/2\tau)t}$$

tanto $\beta + 1/2\tau$ como $-\beta + 1/2\tau$ son positivos y por lo tanto ambos exponenciales son decrecientes. La solución general de la ecuación diferencial del movimiento será combinación lineal de las dos soluciones halladas

$$x = Ae^{-(\beta + 1/2\tau)t} + Be^{-(-\beta + 1/2\tau)t} \quad (9.16)$$

donde A y B son constantes a determinar con las condiciones iniciales. El sistema no oscila, vuelve a la posición de equilibrio sin sobrepasarla. Vea las dos gráficas de la primera fila en la figura 9.6

9.3.2 Amortiguamiento crítico

En este caso $\lambda_{\pm} = -(1/2\tau)$ corresponden a una raíz real doble. No trataremos un método general de solución sino que tomaremos la solución general de la oscilación amortiguada, ecuación 9.12, teniendo en

cuenta que este tercer caso podemos tomarlo como límite de la oscilación amortiguada cuando ω tiende a cero. Así tomando, en la ecuación 9.12, los límites:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos \omega t \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega t} \rightarrow 1$$

tenemos

$$x(t) = e^{-t/2\tau} \left[x(0) + \left(v(0) + \frac{x(0)}{2\tau} \right) t \right] \quad (9.17)$$

de la forma $e^{-t/2\tau}[A + Bt]$, pero en donde las constantes de integración A y B están escritas, ya, en función de las condiciones iniciales. Vea las dos gráficas de la segunda fila en la figura 9.6.

Tabla 9.2 Tres tipos de solución, resumen

$\omega_0 \tau$		ω	$x(t)$
$> 0,5$	Oscilación amortiguada	$\omega = \omega_0(1 - 1/4\omega_0^2\tau^2)^{1/2}$	$Ae^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9.10)$
$\gg 1$	Oscilación débilmente amortiguada	ω_0	$Ae^{-t/2\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
$< 0,5$	Sobreamortiguamiento	No oscila	$Ae^{-(\beta + 1/2\tau)t} + Be^{-(\beta - 1/2\tau)t} \quad (9.16)$
$= 0,5$	Amortiguamiento crítico	No oscila	$e^{-t/2\tau}[A + Bt] \quad (9.17)$

Ejemplo 9.1

Un acelerómetro, constituido por un sistema masa-muelle, se fija a un vehículo en la dirección de su movimiento, figura 9.8.a.



Fig. 9.8.a

a) Si el vehículo avanza con una aceleración constante a , demostrar que la deformación, x , del muelle es proporcional a la aceleración. Determine la constante de proporcionalidad en función de los parámetros del sistema.

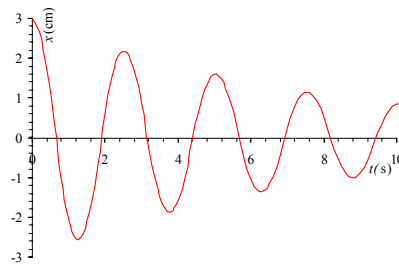


Fig. 9.8.b

b) En un instante dado, $t = 0$, el vehículo desacelera bruscamente desde a hasta $0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. La masa realiza entonces un movimiento $x(t)$, que queda registrado en la gráfica de la figura 9.8.b. Determine numéricamente el período propio del acelerómetro y el tiempo de relajación, τ , del sistema.

Solución

a) Si el vehículo mantiene una cierta aceleración constante, es de esperar que la masa del acelerómetro tenga dicha aceleración después de haber transcurrido cierto tiempo. Pero la única fuerza horizontal que actúa sobre esta masa es la fuerza, F_m , que ejerce el muelle, puesto que al moverse a la misma velocidad que el vehículo las fuerzas viscosas son nulas. Por lo tanto

$$F_m = ma$$

Ahora bien, si el comportamiento del muelle cumple la ley de Hooke, el muelle se deformará proporcionalmente a la fuerza, por lo que $F_m = -kx$, siendo x el desplazamiento de la masa respecto a su punto de equilibrio. Por lo tanto:

$$ma = F_m = -kx$$

de donde

$$a = -(k/m)x$$

La constante de proporcionalidad es $-k/m$, donde el signo menos indica que cuando el vehículo acelera en una dirección, la masa se desplaza en sentido contrario.

b) Según podemos estimar en la figura, para realizar cuatro oscilaciones completas necesita un tiempo de 10 s, por lo que el período es

$$T = 10/4 = 2,5 \text{ s}$$

y la frecuencia angular o pulsación

$$\omega = 2\pi/T = 2,5 \text{ rad/s}$$

En $3T = 7,6 \text{ s}$, la amplitud ha pasado de ser igual a 3 cm a ser igual a 1,2 cm, por lo que

$$3\delta = \ln(3/1,2)$$

y de la ecuación 9.14 se obtiene el tiempo de relajación τ

$$\tau = \frac{T}{2\delta} = 7,6/2\ln(3/1,2) = 4 \text{ s}$$

Dado que la amortiguación no es muy importante [$\omega_0\tau > \omega\tau = 10$], la frecuencia ω calculada coincide, en buena aproximación, con la frecuencia propia del oscilador, ω_0

Ejemplo 9.2

Sea un circuito RLC serie, con parámetros: $R = 1,20 \Omega$, $L = 1,00 \text{ mH}$ y $C = 2,00 \mu\text{F}$.

- compruebe que el circuito es oscilante.
- determine la frecuencia angular de oscilación.
- calcule el tiempo necesario para que la *amplitud* de la oscilación de la carga en C se reduzca a la mitad.
- calcule el valor crítico de la resistencia, R_C , que haría que el circuito fuera no oscilante.

Solución

- La condición para que el circuito sea oscilante es que $\omega_0\tau > 0,5$, o en función de los parámetros del circuito: $(1/LC)^{1/2}(L/R) > 0,5$, o $(L/C)^{1/2}(1/R) > 0,5$. Para los valores dados: $(L/C)^{1/2}(1/R) = 19 > 0,5 \Rightarrow$ oscila
- La frecuencia propia vale: $\omega_0 = 1/(LC) = 22,4 \text{ rad/s}$, y el tiempo de relajación: $\tau = L/R = 0,83 \text{ ms}$, por tanto $\omega_0\tau = (L/C)^{1/2}/R = 18,6 \gg 1/2$ y podemos tomar $\omega \approx \omega_0$
- La carga oscila según: $q(t) = q_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi_0)$, por tanto la amplitud de la carga decrece exponencialmente con el tiempo: $q_0(t) = q_0(0) e^{-t/2\tau} \Rightarrow t^* = (2\tau) \ln(q_0(0)/q_0(t^*)) = 2 \cdot 0,83 \cdot \ln 2 = 1,16 \text{ ms}$
- La condición para el caso crítico es que $\omega_0\tau = 0,5$ o $(L/C)^{1/2}(1/R) = 0,5$ luego: $R_C = 2(L/C)^{1/2} = 45 \Omega$

9.4 Energía de un oscilador débilmente amortiguado

En el oscilador armónico la energía es una magnitud que se conserva; en un oscilador amortiguado la *fuerza viscosa* produce una degradación de la energía. La potencia disipada será

$$P = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -bv^2$$

Tomemos el caso de un oscilador mecánico

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 = -\frac{2b}{m} \frac{mv^2}{2} = -\frac{2}{\tau} E_k$$

en valor medio para un ciclo

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{\tau} \langle E_k \rangle \quad (9.18)$$

Si el sistema es tal que $Q \gg 1$, el amortiguamiento es pequeño y podemos tomar el movimiento como armónico simple durante unos cuantos ciclos. Entonces, al igual que en un oscilador armónico, podemos tomar $2\langle E_k \rangle = \langle E \rangle$, y por tanto

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau} \langle E \rangle$$

e integrando

$$\langle E \rangle = \langle E \rangle_0 e^{-t/\tau} \quad (9.19)$$

Para fijar ideas de la aproximación realizada, consideremos de nuevo la energía mecánica de la partícula como suma de las energías cinética y potencial; en este orden de aproximación $\omega \approx \omega_0$

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

derivando respecto al tiempo $x(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi)$, elevando al cuadrado y sustituyendo, se obtiene para la energía cinética

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m A_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ \frac{1}{4\tau^2} \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{2\tau} \sin 2(\omega t + \phi) \right\}$$

Elevando x al cuadrado y sustituyendo en la expresión de la energía potencial, se obtiene:

$$U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \cos^2(\omega t + \phi)$$

Sumando las expresiones de ambas energías

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ \left(\frac{1}{4Q^2} \cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2Q} \sin 2(\omega t + \phi) \right) + \cos^2(\omega t + \phi) \right\}$$

En la figura 9.9 se muestran las gráficas de las energías potencial, cinética y mecánica de dos osciladores con $\tau = 1$ s. En $E(t)$ se puede observar un decrecimiento exponencial al que se superpone un cierto *rizado*.

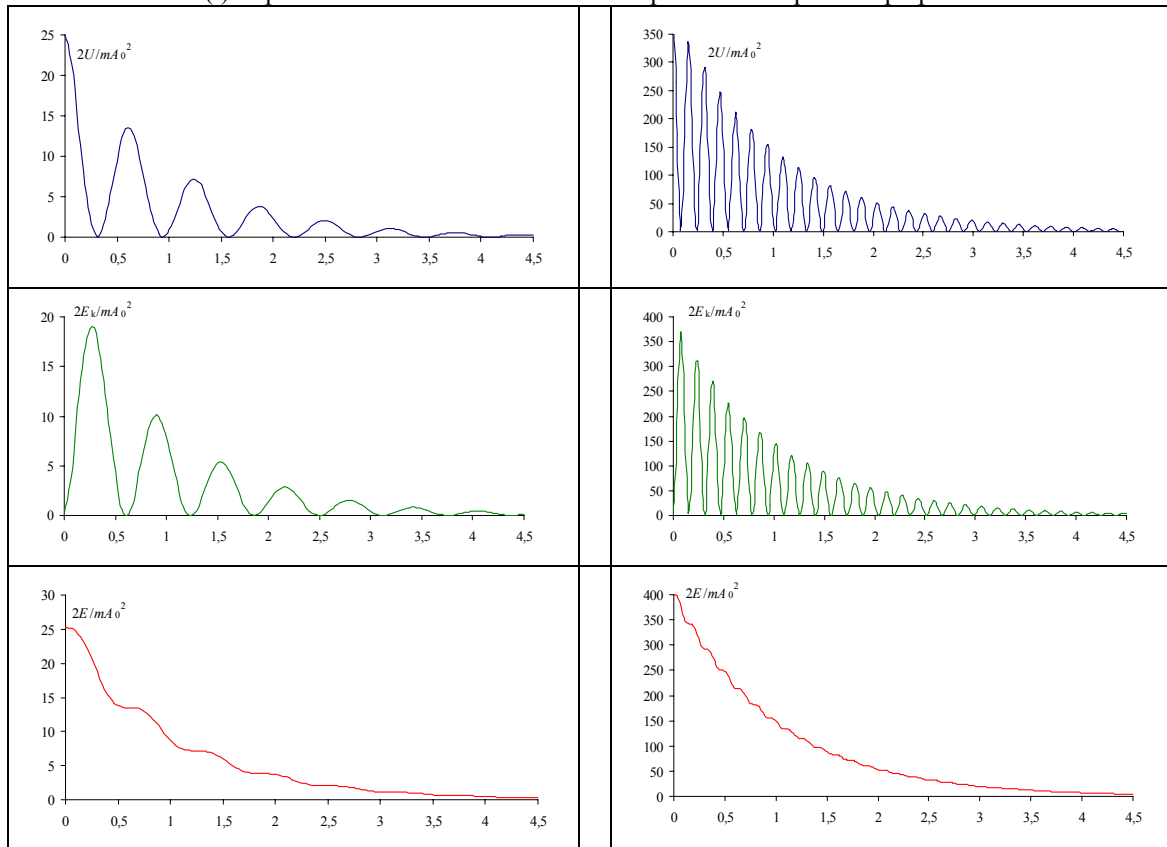


Fig. 9.9 Energías potencial, cinética y mecánica de dos osciladores con $\tau = 1$ s; la columna de la izquierda con $\omega = 5$ rad/s y la de la derecha con $\omega = 20$ rad/s

Este rizado disminuye al aumentar el factor de calidad del oscilador. En la figura 9.9 se muestran las energías de dos osciladores de distinto Q y el mismo τ , para poder compararlas mejor. Se puede observar la disminución de la amplitud del rizado en la de mayor Q .

En una primera aproximación podemos despreciar el término en Q^2 frente a los otros

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ 1 + \frac{1}{2Q} \sin 2(\omega t + \phi) \right\}$$

donde vemos que la amplitud del rizado viene determinada por $1/2Q$.

Así, si el factor de calidad es grande, o lo que es lo mismo si el amortiguamiento es débil, podemos tomar

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau} = E(0)e^{-t/\tau}$$

Es decir, si $Q \gg 1$, la energía puede considerarse constante durante cualquier ciclo, pero decrece exponencialmente en un intervalo de tiempo que suponga muchos ciclos. La aproximación mejora claramente si en lugar del valor instantáneo $E(t)$ tomamos el valor medio como en la ec. 9.19. Observemos que en un tiempo $t = \tau$ la energía queda dividida por el número e.

Veamos como el número adimensional $\omega_0 \tau$ nos da la misma idea de la rapidez de pérdida de energía, pero expresada en número de oscilaciones. Si n es el número de ciclos en un tiempo τ

$$\tau = nT = n \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La energía, después del número de ciclos realizados en el tiempo de relajación $n = \omega_0 \tau / 2\pi$, vale

$$E(nT) = E(0) e^{-1}$$

Podemos dar ahora una definición general del número adimensional Q , al que llamamos *factor de calidad del oscilador*

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía perdida por ciclo}} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\left| \frac{dE}{dt} \right| T} \quad (9.20)$$

La energía perdida se toma en valor absoluto para que el factor de calidad sea positivo. Para calcular la energía perdida por ciclo, como $E(t+T) = E(t)e^{-T/\tau}$ podemos escribir:

$$\frac{E(t+T)}{E(t)} = e^{-T/\tau}$$

Restando la unidad a cada miembro de la igualdad

$$\frac{E(t+T)}{E(t)} - 1 = \frac{\Delta E}{E} = e^{-T/\tau} - 1 \quad (9.21)$$

que nos da el porcentaje de energía perdida por ciclo. Si $T < \tau$ podemos hacer la aproximación:

$$e^{-T/\tau} \cong 1 - \frac{T}{\tau} + \frac{T^2}{2\tau^2}$$

y así

$$\frac{\Delta E}{E} = e^{-T/\tau} - 1 \approx -\frac{T}{\tau} + \frac{T^2}{2\tau^2}$$

Si $T \ll \tau$, podemos despreciar el segundo sumando; entonces la energía perdida por ciclo es:

$$\Delta E = -(T/\tau)E$$

tomando la energía perdida en valor absoluto y en esta aproximación

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía perdida por ciclo}} \cong 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega_0 \tau$$

La aproximación $Q = \omega_0 \tau$ se usa habitualmente como definición de factor de calidad.

Para valorar la condición $T \ll \tau$, tomemos algún ejemplo. Si en un oscilador $\omega_0 \tau = 10$, hemos visto que tomar la frecuencia propia ω_0 como la de la oscilación amortiguada suponía un error del 0,13 %. Calculando la energía perdida por ciclo:

$$\Delta E/E = e^{-T/\tau} - 1 = -0,47, \text{ es decir la pérdida de energía es del orden del 47 \%}$$

Con la aproximación: $\Delta E/E = e^{-T/\tau} - 1 \approx -T/\tau + T^2/2\tau^2 = -0,63 + 0,2 = -0,43$, es decir del 43 %.

Con la primera aproximación: $\Delta E/E \approx -T/\tau = -0,63$ es decir del orden del 63 %, que resulta una aproximación inaceptable. Si calculamos el factor de calidad según su definición general, ec. (9.20): $Q = 2\pi(1/0,47) = 13$. Si lo calculamos con la expresión aproximada $Q = \omega_0 \tau = 10$. En la tabla 9.3 se recogen estos datos, añadiendo las filas correspondientes a $\omega_0 \tau = 20$ y $\omega_0 \tau = 30$.

Tabla 9.3 Pérdidas de energía y factor de calidad. Aproximaciones

$\omega_0 \tau$	$\Delta E/E = e^{-T/\tau} - 1$	$\Delta E/E \approx -T/\tau + T^2/2\tau^2$	$\Delta E/E \approx -T/\tau$	$Q(\text{ec. (9.20)})$	$Q \approx \omega_0 \tau$
10	-0,47 → 47 %	-0,43 → 43 %	-0,63 → 63 %	13	10
20	-0,27 → 27 %	-0,26 → 26 %	-0,31 → 31 %	23	20
30	-0,19 → 19 %	-0,19 → 19 %	-0,21 → 21 %	33	30

Ejemplo 9.3

Un oscilador mecánico tiene un amortiguador cuyo coeficiente de rozamiento viscoso es de 0,2 kg/s y su periodo en régimen libre es de 2,0 s. Se puede aproximar el decaimiento de la energía por un exponencial de constante de tiempo 16 s. Calcule los valores de:

- la pérdida relativa de energía en un ciclo y en dos ciclos
- su masa, m , y de la rigidez, k , de su muelle.

Solución

- $\tau = 16$ s y $\omega = 2\pi/T = 3,1$ rad/s; $\omega \tau = 49,6$, $\omega \tau < \omega_0 \tau$, el factor de calidad, $Q \approx 50$, $E(t) = E(0)e^{-t/\tau}$
 $[E(0)e^{-T/\tau} - E(0)]/E(0) = e^{-T/\tau} - 1 = e^{-2/16} - 1 = -0,12$, $\Delta E/E = e^{-2T/\tau} - 1 = e^{-4/16} - 1 = -0,22$
- $m = b\tau = 0,2 \cdot 16 = 3,2$ kg, $k = m\omega_0^2 = b\tau\omega_0^2 = 0,2 \cdot 16 \cdot \pi^2 = 32$ N/m

9.5 Circuito RLC

El circuito serie RLC oscilará si $\omega_0 \tau > 0,5$ o lo que es lo mismo si $1/LC > R^2/4L^2$, en cuyo caso lo hará con una frecuencia

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \quad (9.22)$$

Como R/L tiene dimensiones de frecuencia, $L\omega$ tiene dimensiones de resistencia y se mide en ohmios. Como dimensionalmente $[L\omega] = [1/C\omega]$ también $1/C\omega$ se mide en ohmios.

La resistencia, *fuerza viscosa*, produce un decrecimiento exponencial de la energía, análogamente al caso mecánico. Para un circuito oscilante

$$\text{Potencia disipada} = \frac{dU}{dt} = -Ri^2 = -\frac{2R}{L} \frac{Li^2}{2} = -\frac{2}{\tau} U_B$$

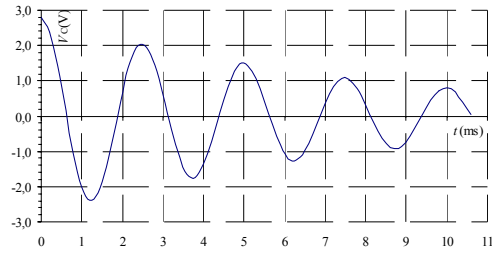
Donde U_B es la energía almacenada en la bobina en forma de campo magnético. Si el sistema es tal que $Q \gg 1$, el amortiguamiento es pequeño y podemos tomar, como hemos hecho en el oscilador mecánico, $Q = \omega_0 \tau = (1/LC)^{1/2}(L/R) = (L/C)^{1/2}/R$. La disminución de energía con el tiempo viene dada por:

$$\langle U \rangle = \langle U \rangle_0 e^{-t/\tau}$$

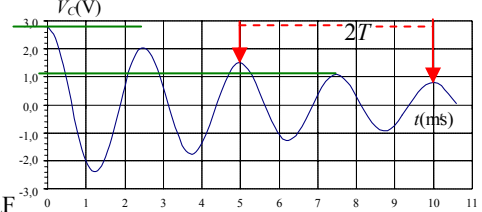
Ejemplo 9.4

La figura representa la diferencia de potencial en un condensador, de un oscilador libre RLC , en función del tiempo $V_C(t)$, viene medida en voltios y el tiempo en milisegundos. La energía almacenada inicialmente en el condensador vale: $E(0) = \frac{1}{2}CV_C(0)^2 = 1,8 \mu\text{J}$. Determine:

- la frecuencia de oscilación ω
- el decremento logarítmico δ
- el tiempo de relajación τ
- la capacidad del condensador C
- el coeficiente de autoinducción de la bobina L
- la resistencia R del circuito
- la energía disipada en el primer ciclo, en valor absoluto y en porcentaje
- la energía disipada en el segundo ciclo
- el tiempo necesario para la energía del oscilador sea un uno por ciento del valor inicial $E(0)$

**Solución**

- $2T = 5 \text{ ms}$, $T = 2,5 \text{ ms}$, $\omega = 2\pi/T = 2,5 \text{ krad/s}$
- $A(t + nT) = A(t) e^{-nT/2\tau}$, $A(3T) = A(0) e^{-3T/2\tau}$
 $3T/2\tau = \ln(A(0)/A(3T)) = \ln(2,8/1,15) = 0,89$
 $\delta = T/2\tau = 0,89/3 = 0,30$
- $\tau = T/2\delta = 4,2 \text{ ms}$
- $E(0) = \frac{1}{2}CV_C(0)^2 = 1,8 \mu\text{J}$, $V_C(0) = 2,8 \text{ V}$, $C = 2E(0)/V_C(0)^2 = 0,46 \mu\text{F}$
- como $\omega\tau = 2,5 \times 10^3 \times 4,2 \times 10^{-3} = 10 \gg 1$, $\omega \approx \omega_0 = (1/LC)^{1/2}$, $L = 1/\omega^2 C = 0,35 \text{ H}$
- $R = L/\tau = 0,12/(4,2 \times 10^{-3}) = 83 \Omega$
- $E(T) = E(0)e^{-T/\tau}$, $E(T)/E(0) - 1 = \Delta E/E(0) = e^{-T/\tau} - 1 = -0,45$, pierde un 45% por ciclo, en el primero $E(0) \times 0,45 = 1,8 \mu\text{J} \times 0,45 = 0,80 \mu\text{J}$
- $E(T) = E(0) - \Delta E = 1,8 \mu\text{J} - 0,80 \mu\text{J} = 1,0 \mu\text{J}$, así la energía disipada en el segundo ciclo $= 1,0 \mu\text{J} \times 0,45 = 0,45 \mu\text{J}$
- $E(t^*) = E(0)/100 = E(0)e^{-t^*/\tau}$, $t^* = \tau \ln 100 = 19 \text{ ms}$



10 Oscilaciones forzadas

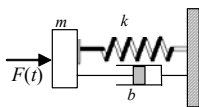
- 10.1 Analogía entre magnitudes mecánicas y eléctricas
- 10.2 Excitación armónica: Principio de superposición
- 10.3 Regímenes transitorio y permanente
- 10.4 Intensidad de la corriente. Impedancia
- 10.5 Amplitud de la respuesta
- 10.6 Estudio de la fase
- 10.7 Energía
- 10.8 Intercambios de energía en un oscilador forzado
- 10.9 Estudio de la potencia absorbida en función de la frecuencia. Resonancia

La energía de un oscilador libre ligeramente amortiguado se disipa, prácticamente, al cabo de Q ciclos. Un problema que podemos plantearnos es cómo mantener esa oscilación, o de otra forma: cómo suministrar al oscilador una energía equivalente a la que va disipando; veremos como se transfiere la energía al oscilador e introduciremos el concepto de impedancia.

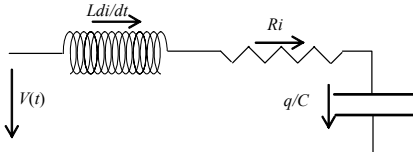
10.1 Analogía entre magnitudes mecánicas y eléctricas

Este análisis se puede aplicar tanto a un sistema mecánico como a un circuito eléctrico. El oscilador mecánico está constituido, como en el capítulo anterior, por un sistema masa-muelle; una fuerza de rozamiento viscoso actúa sobre el sistema. En la figura 10.1 se ha representado por un émbolo que se mueve en un cilindro tal que la fuerza necesaria para mover el émbolo es proporcional a la velocidad del émbolo respecto del cilindro, que está sujeto al soporte rígido al que también se une el muelle. La fuerza impulsora $F(t)$ se aplica a m y $x(t)$ es el desplazamiento desde la posición de equilibrio.

Oscilador mecánico

$$m \frac{dv}{dt} + bv + kx = F(t)$$


Oscilador eléctrico

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = V(t)$$


(10.1)

Fig 10.1 Sistemas análogos: osciladores mecánico y eléctrico

El sistema eléctrico análogo es un circuito serie RLC ; en los terminales del circuito se aplica un voltaje $V(t)$. La carga del condensador viene dada por $q(t)$ y la corriente $i(t) = dq/dt$; los voltajes en el condensador, la inductancia y la resistencia son q/C , $L di/dt$ y Ri respectivamente y la suma de los tres debe ser igual al voltaje aplicado. Las analogías electromecánicas se resumen en la tabla 10.1

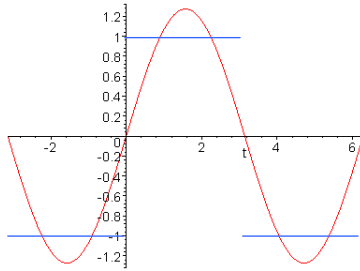
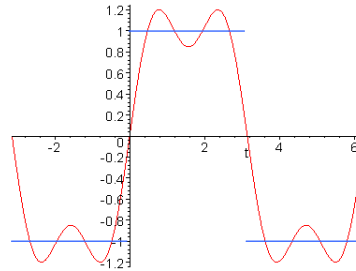
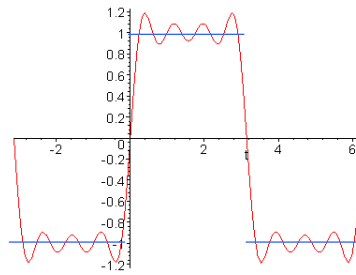
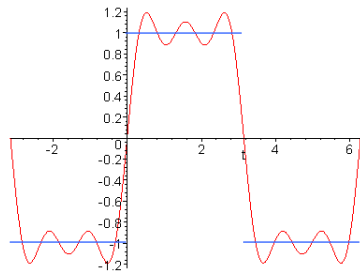
Tabla 10.1 Analogía entre magnitudes mecánicas y eléctricas

<i>Oscilador mecánico</i>	<i>Oscilador eléctrico</i>
$m \frac{dv}{dt} + bv + kx = F(t)$	$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = V(t)$
Desplazamiento x	Carga q
Velocidad $v = dx/dt$	Corriente $i = dq/dt$
Masa inercial m	Inductancia L
Coefficiente de rozamiento viscoso, b	Resistencia R
Coefficiente de elasticidad, k	Capacidad C , $1/k \rightarrow C$
Frecuencia propia, $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$	Frecuencia propia, $\omega_0 = (1/LC)^{1/2}$
Energía cinética, $mv^2/2$	Energía magnética $Li^2/2$
Energía potencial, $kx^2/2$	Energía eléctrica $q^2/2C$
Potencia entregada, Fv	Potencia entregada, Vi

10.2. Excitación armónica: Principio de superposición

Estudiaremos con algún detalle la respuesta de un oscilador cuando la fuerza impulsora $F(t)$, o bien $V(t)$, es una fuerza armónica $F(t) = F_0 \cos \omega t$, donde suponemos una amplitud F_0 constante e independiente de

la frecuencia ω y una fase inicial nula: es la situación más simple. Si conocemos el comportamiento $x(t)$ del oscilador para una sollicitación armónica, $F_0 \cos \omega t$, podemos hallar su comportamiento ante una fuerza que sea combinación lineal de funciones armónicas. Esto se debe a la linealidad de la ecuación diferencial que nos permite aplicar el principio de superposición. Todas las funciones periódicas que pueden significar algo físicamente son funciones que pueden desarrollarse en la llamada *serie de Fourier*. Es una técnica que no vamos a desarrollar aquí, simplemente pretendemos que se sepa de su existencia. Como ejemplo, en las figuras 10.2 se muestra una función *cuadrada* que va siendo *aproximada* mediante senos de amplitud y periodo convenientemente elegidos.

Fig 10.2.a $y = (4/\pi) \sin t$ Fig 10.2.b $y = (4/\pi) \sin t + (4/3\pi) \sin(3t)$ Fig 10.2c $y = (4/\pi) \sin t + (4/3\pi) \sin(3t) + (4/5\pi) \sin(5t)$ Fig 10.2d $y = (4/\pi) \sin t + (4/3\pi) \sin(3t) + (4/5\pi) \sin(5t) + (4/7\pi) \sin(7t)$

Figuras 10.2 Aproximación de una función cuadrada por combinaciones lineales de funciones armónicas

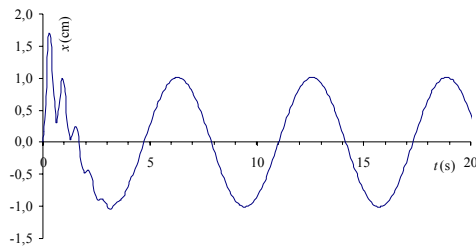
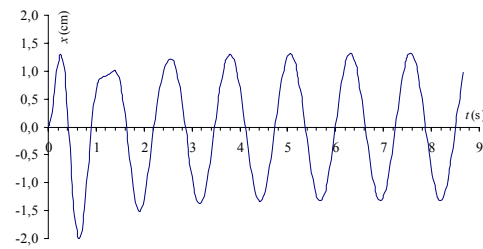
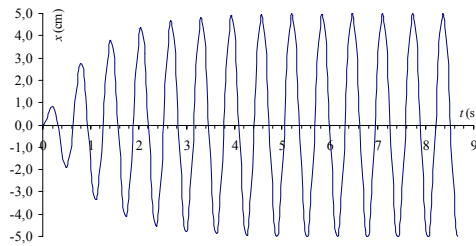
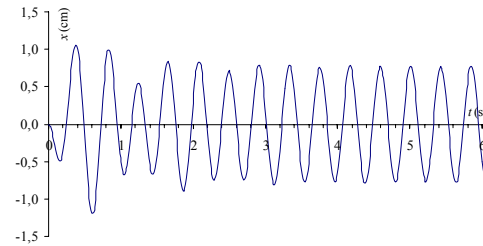
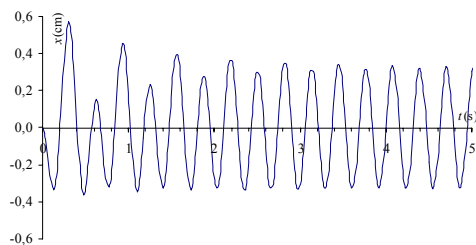
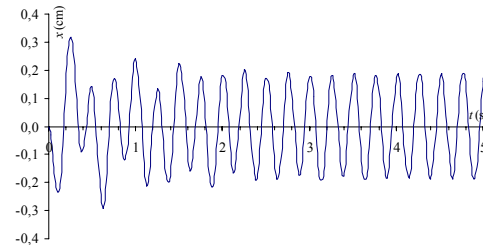
Esto ilustra que las funciones periódicas pueden substituirse por sumas adecuadas de senos y cosenos; en general algo como

$$F(t) = \sum_{n=0}^n (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

El desarrollo en serie de Fourier de una función periódica nos permite asegurar que si conocemos el comportamiento $x(t)$ del oscilador para una sollicitación armónica, podemos hallar su comportamiento ante una fuerza que sea combinación lineal de funciones armónicas. Por lo tanto sólo consideraremos el caso de una fuerza exterior armónica, $F_0 \cos \omega t$, que a veces representaremos por: $F_0 e^{j\omega t}$, tal que: $\Re[F_0 e^{j\omega t}] = F_0 \cos \omega t$ y sabiendo que las respuestas con significado físico vendrán dadas por la parte real.

10.3 Regímenes transitorio y permanente

En las gráficas de las figuras 10.3 se muestra la respuesta de un oscilador de frecuencia propia $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, y tiempo de relajación $\tau = 0,5 \text{ s}$, excitado por una fuerza armónica $F = (100 \text{ N}) \cos \omega t$, para la que se han tomado seis valores de la frecuencia. Las condiciones iniciales: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, no cambian en ninguna de las seis frecuencias presentadas. Se puede observar como transcurridos $\approx 8\tau$, para cualquier frecuencia de la fuerza aplicada, el sistema oscila a la frecuencia impuesta por la fuerza impulsora.

Fig. 10.3.1 $\omega = 1$ rad/sFig. 10.3.2 $\omega = 5$ rad/sFig. 10.3.3 $\omega = 10$ rad/sFig. 10.3.4 $\omega = 15$ rad/sFig. 10.3.5 $\omega = 20$ rad/sFig. 10.3.6 $\omega = 25$ rad/s

Figuras 10.3 Respuesta de un oscilador al variar la frecuencia de la fuerza impulsora. Fíjese en que las escalas de ambos ejes van cambiando.

En las gráficas de las figuras 10.3 se observa un transitorio que dura de 3 s a 4 s, es decir entre 6τ y 8τ , seguido de un tiempo en el que la oscilación aparece como armónica, con una amplitud que vemos depende de la frecuencia de la fuerza impulsora. Fíjese que las escalas de x van cambiando. Así vemos que la amplitud de la oscilación va aumentando con la frecuencia hasta que la frecuencia de la fuerza impulsora alcanza la frecuencia propia ω_0 y va disminuyendo significativamente al seguir aumentando ω . En las gráficas de la figura 10.4 se mantienen constantes los parámetros: $\omega_0 = 10$ rad/s, $\tau = 0,5$ s, $F_0 = 100$ N, y se cambian las condiciones iniciales, para dos frecuencias de la fuerza impulsora. Se puede observar como transcurridos $\approx 8\tau$ la respuesta es la misma en las tres situaciones de cada columna; el sistema oscila a la frecuencia impuesta por la fuerza aplicada de forma independiente de las condiciones iniciales. Se puede decir que transcurridos unos cuantos τ el oscilador *olvida* las condiciones iniciales y oscila a la frecuencia ω que le impone la fuerza, o tensión, impulsora, y con una amplitud de oscilación dependiente de esa frecuencia ω .

Matemáticamente, podemos decir que la solución de la ecuación diferencial 10.1 es la *suma de la solución general de la ecuación homogénea*, es decir la del oscilador libre, y *de una solución particular*. Hemos visto que cualquier tipo de solución de la homogénea es amortiguada: su amplitud es despreciable al cabo de un cierto tiempo, unos cuantos τ . Así que nos vamos a interesar solamente por el estado de movimiento que resulta de la aplicación de la fuerza excitadora armónica, cuando todos los fenómenos transitorios han desaparecido.

Este estado que queda, o *régimen estacionario*, corresponde a una oscilación armónica de pulsación igual a la de la fuerza excitadora ω , en general distinta de la propia ω_0 del oscilador. El estado de movimiento, correspondiente a la oscilación forzada en régimen permanente, o estacionario, viene expresado por la solución particular de la ecuación diferencial 10.1.

Condiciones iniciales: $x(0) = 0, v(0) = 0$

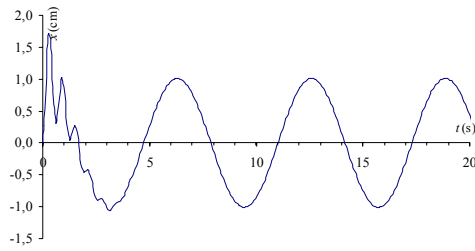


Fig. 10.4.1 $\omega = 1$ rad/s

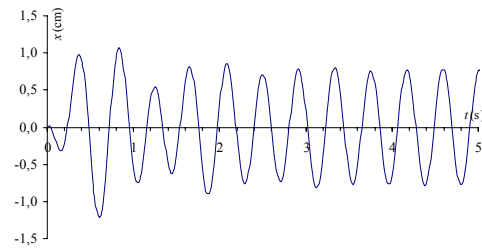


Fig. 10.4.2 $\omega = 15$ rad/s

Condiciones iniciales: $x(0) = 2, v(0) = 0$

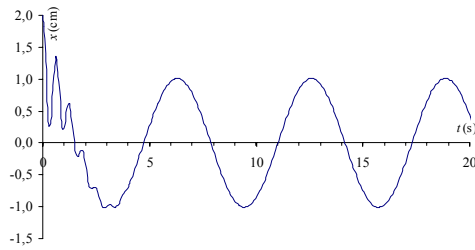


Fig. 10.4.3 $\omega = 1$ rad/s

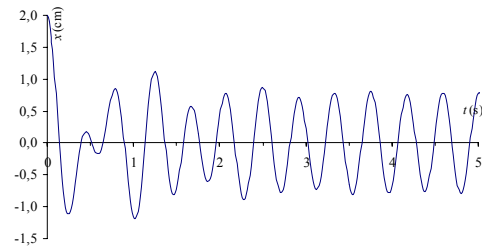


Fig. 10.4.4 $\omega = 15$ rad/s

Condiciones iniciales $x(0) = 0, v(0) = 2$

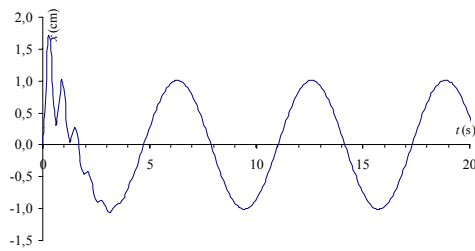


Fig. 10.4.5 $\omega = 1$ rad/s

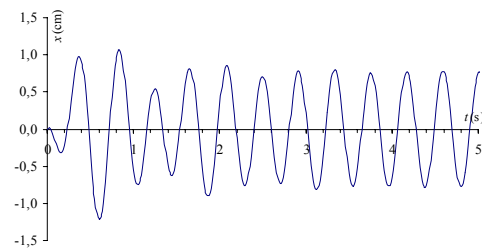


Fig. 10.4.6 $\omega = 15$ rad/s

Figuras. 10.4 Las gráficas ilustran como el régimen estacionario resulta independiente de las condiciones iniciales

El desplazamiento $x(t)$ corresponde, en el oscilador eléctrico, a la carga del condensador, pero en estos osciladores estamos interesados, normalmente, sólo en la corriente, es decir en conocer la respuesta en frecuencia del circuito mediante el conocimiento de la dependencia de la amplitud y la fase de la corriente.

10.4 Intensidad de la corriente. Impedancia

La intensidad de la corriente eléctrica, o su magnitud análoga la velocidad de desplazamiento debe cumplir la ecuación diferencial

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = V_0 \cos(\omega t) \quad (10.2)$$

La solución particular es una función armónica de frecuencia ω , $i = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$. Para que sea solución de la ecuación 10.2 es necesario y suficiente que la función compleja

$$I = I_0 e^{j(\omega t + \alpha)} = I_0 e^{j\omega t}$$

sea solución de la ecuación compleja que corresponde a la 10.2

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} q = V_0 e^{j\omega t} \quad (10.3)$$

recordando que, al final del cálculo, sólo utilizaremos la parte real del resultado. Sustituimos

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I, \quad I = \frac{dq}{dt} = j\omega q, \text{ y por tanto: } q = -jI/\omega$$

obteniendo

$$Lj\omega I + RI - jI/C\omega = V_0 e^{j\omega t}$$

En el primer miembro sacamos factor común $I = I_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t}$

$$[j\omega L + R - j/C\omega] I_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t} \quad (10.4)$$

Introducimos la magnitud compleja:

$$Z = R + [L\omega - 1/C\omega]j = Ze^{j\phi} \quad (10.5)$$

Que llamaremos impedancia del oscilador. Su módulo y argumento dependen de las características físicas del oscilador y de la frecuencia impulsora. Su módulo y argumento son:

$$Z = [R^2 + [L\omega - 1/C\omega]^2]^{1/2}, \quad \phi = \arctg[L\omega - 1/C\omega]/R$$

La igualdad (10.4) se puede escribir abreviadamente como

$$ZI = V \quad (10.6)$$

También se puede eliminar, en la (10.4), la dependencia temporal $e^{j\omega t}$ en los dos miembros; entonces de la igualdad de módulos entre los dos miembros se tiene:

$$ZI_0 = V_0$$

Y de la igualdad de argumentos: $\phi + \alpha = 0$. Así, la intensidad de corriente compleja I solución de la ecuación (10.3) es:

$$I = V/Z = (V_0/Z) e^{j(\omega t - \phi)} \quad (10.7)$$

La corriente en el circuito es:

$$i(t) = \Re[I] = (V_0/Z) \cos(\omega t - \phi) \quad (10.7b)$$

Análogamente, la velocidad de desplazamiento de un oscilador mecánico sería:

$$v(t) = \Re[V] = (F_0/Z) \cos(\omega t - \phi) \quad (10.7c)$$

con una impedancia compleja

$$Z = b + [m\omega - k/\omega]j = Ze^{j\phi} \quad (10.5.b)$$

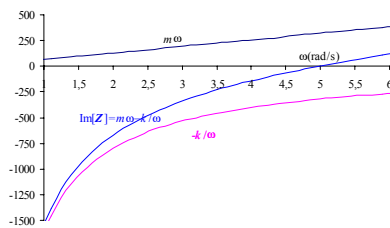


fig. 10.5a

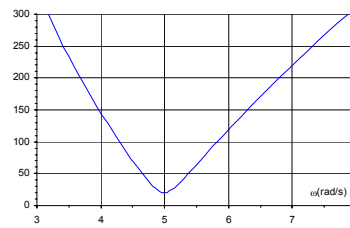


fig. 10.5b

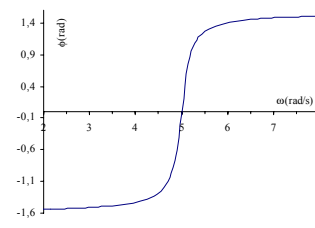


fig. 10.5c

fig. 10.5a Parte imaginaria de la impedancia en función de ω ; fig. 10.5b Módulo de la impedancia en función de ω
fig. 10.5c Argumento de la impedancia en función de ω .

Las tres gráficas corresponden a un oscilador con $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$ y $\tau = 3,2 \text{ s}$

10.5 Amplitud de la respuesta

El conocimiento del desplazamiento $x(t)$ es interesante en los osciladores mecánicos; vamos a determinarlo a partir de la determinación de la velocidad que acabamos de hacer. La función compleja

$$X = Ae^{j(\omega t + \delta)} = Ae^{j\omega t}$$

representa el desplazamiento y debe cumplir:

$$\frac{dX}{dt} = j\omega X = F/Z$$

de donde podemos obtener X

$$X = (F/j\omega Z) = -jF/(\omega Z)$$

Todos los términos que contienen el tiempo están en el factor $e^{j\omega t}$ presente en X y en F , podemos así simplificarlo y escribir

$$A = -jF_0/(\omega Z) \quad (10.8)$$

Conocida la impedancia, la amplitud compleja A tendrá un módulo

$$A = F_0/\omega Z \quad (10.8b)$$

Sustituyendo el módulo de la impedancia

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(-\omega^2 m + k)^2 + (\omega b)^2}} \quad (10.8c)$$

El argumento del desplazamiento es

$$\delta = -(\varphi + \pi/2) \quad (10.9)$$

y su tangente

$$\text{tg}\delta = \text{tg}(-(\varphi + \pi/2)) = 1/\text{tg}\varphi = \frac{-\omega b}{k - \omega^2 m}$$

En estas expresiones podemos introducir: $b/m = 1/\tau$, y $k/m = \omega_0^2$ obteniendo fórmulas alternativas:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad (10.10)$$

$$\text{tg}\delta = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10.11)$$

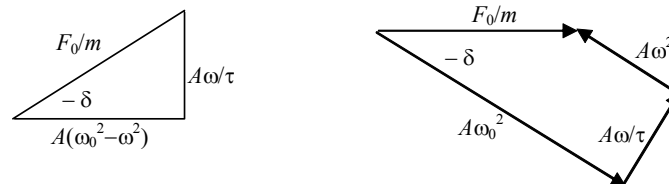


fig 10.6 Triángulo nemotécnico y diagrama vectorial en estado estacionario

El triángulo de la figura 10.6 es nemotécnico de las fórmulas (10.10) y (10.11). Estos valores de A y δ determinan la parte real de X , solución particular de la ecuación 10.2; si el oscilador es eléctrico basta cambiar F_0/m por V_0/L y recordar que x sería la carga del condensador

$$x = \Re(X) = A\cos(\omega t + \delta) \quad (10.12)$$

La amplitud, $A(\omega)$, cuya expresión acabamos de obtener, tiende a ser nula para frecuencias muy elevadas, $\omega \gg \omega_0$, $A(\omega \gg \omega_0) = 0$. A muy bajas frecuencias, $\omega \ll \omega_0$, la amplitud vale:

$$A(\omega \ll \omega_0) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

Presentará un máximo para una pulsación tal que el denominador de la expresión de $A(\omega)$ sea mínimo

$$\frac{d[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]}{d\omega} = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\frac{\omega}{\tau^2} = 0$$

de donde

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} = \omega_0^2 \left[1 - \frac{1}{2Q^2} \right]$$

y para $Q > 1$, podemos tomar $\omega \approx \omega_0(1 - 1/4Q^2)$ como valor de ω que hace máxima la amplitud de oscilación. Para esta frecuencia se dice que hay *resonancia de amplitud* entre el oscilador y la fuerza excitadora. La forma de la curva depende del factor de calidad, Q , del oscilador, como queda de manifiesto escribiendo

$$A = \frac{A(0)}{\sqrt{[1 - (\omega^2/\omega_0^2)]^2 + (\omega^2/\omega_0^2)/Q^2}}$$

Para la frecuencia de resonancia de amplitud obtenida la amplitud es:

$$A_{\max} = A(0) \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/(2Q)^2}} \quad (10.13)$$

y para $\omega = \omega_0$

$$A(\omega_0) = A(0)Q \quad (10.14)$$

Para $Q \geq 3$, el error que se comete al tomar $A(\omega_0) \approx A_{\max}$ es menor que el 2 %, aproximación más que suficiente para nuestros cálculos.

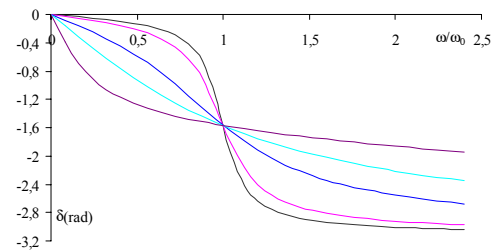
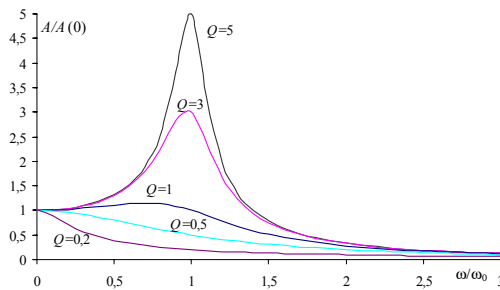


fig. 10.7.a Gráfica normalizada de la amplitud de desplazamiento, para distintos valores de $\omega_0\tau$

fig. 10.8 Fase del desplazamiento, para distintos valores de $\omega_0\tau$

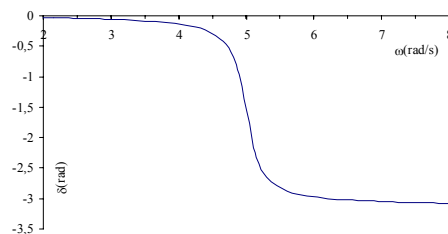
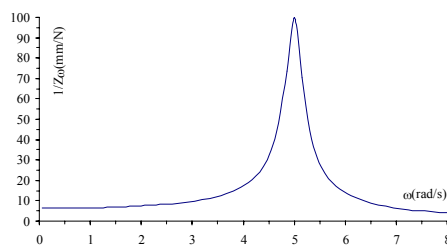


fig. 10.7.b Amplitud de desplazamiento

fig. 10.8.b Fase del desplazamiento

Las dos gráficas b corresponden a un oscilador con $\omega_0 = 5$ rad/s y $\tau = 3,2$ s.

La figura 10.7 b muestra $A(\omega)$ en un caso en que se ha tomado $F_0 = 1$ N. Observe que *el número adimensional Q nos indica como se amplifica la amplitud del desplazamiento originado por una fuerza F_0 que, en lugar de ser constante, es armónica de frecuencia igual a la propia del oscilador*, es decir de la forma $F_0 \cos \omega_0 t$.

En la resonancia y en amortiguamiento débil, $Q \gg 1$, el máximo de la amplitud es $A(\omega_0) = QA(0)$ y se hace más importante cuanto menor es el amortiguamiento. Si el oscilador es un sistema mecánico, puede producirse su ruptura debido a la gran deformación.

10.6 Estudio de la fase

La dependencia de la fase de las oscilaciones con la frecuencia excitadora viene dada por (10.11):

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{(\omega/\omega_0)Q}{(\omega/\omega_0)^2 - 1} \quad (10.15)$$

El desplazamiento retarda siempre respecto a la fuerza excitadora, como se ve claramente en las figuras 10.8. Para frecuencias bajas, $\omega \ll \omega_0$, la fase es casi nula. La respuesta está en fase con la excitación. A semejanza del equilibrio estático, la rigidez del muelle rige la amplitud, casi completamente.

Para frecuencias altas, $\omega \gg \omega_0$, el desplazamiento está retrasado en π respecto a la excitación (oposición de fase). La amplitud $F_0/m\omega^2$ queda, ahora, regida por la inercia.

10.7 Energía

La energía cinética, por supuesto en el régimen estacionario, viene dada por:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - \varphi)$$

Como $x = A \cos(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t - \varphi)$, la energía potencial viene dada por

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi)$$

La energía total será

$$E = E_k + U = \frac{1}{2} m A^2 [\omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 \sin^2(\omega t - \varphi)]$$

que resulta variar con el tiempo. Será constante sólo si $\omega = \omega_0$ en cuyo caso: $E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$. Los valores medios de la energía cinética y potencial son

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

y

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2$$

Comprobamos que *la equipartición de la energía entre energías cinética y potencial promedio, sólo se verifica en el caso de que la frecuencia de excitación coincida con la propia del oscilador.*

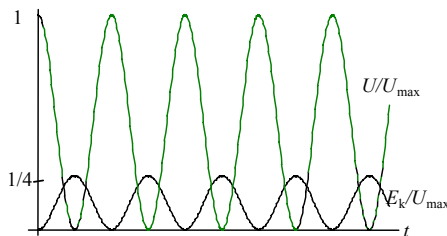


Fig. 10.9 En el eje de ordenadas figura la energía normalizada, es decir la energía dividida por $U_{\max} = m\omega_0^2 A^2/2$. La E_k se ha representado para $\omega = \omega_0/2$

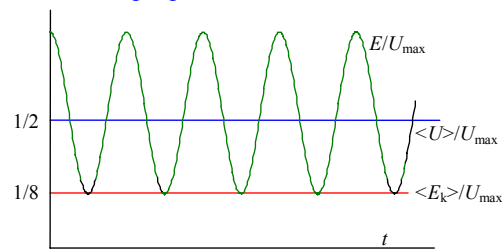


Fig. 10.10 En la gráfica se representa, la energía total del sistema dividida por $U_{\max}$ y las energías cinética media y potencial media, también para $\omega = \omega_0/2$

En la representación gráfica de las figuras 10.9 y 10.10 se ha tomado $\omega = \omega_0/2$. Para este caso particular

$$E_k(t) = \frac{1}{8} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t - \varphi), \quad \langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{16} m \omega_0^2 A^2, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2$$

10.8 Intercambios de energía en un oscilador forzado

Recordemos que la *potencia disipada* por el rozamiento viscoso viene dada por el producto escalar de la fuerza viscosa, $-b\mathbf{v}(t)$, por la velocidad $\mathbf{v}(t)$, y supuesto el estado estacionario

$$P_{\text{disipada}} = -b\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = -bv(t)^2 = -bv_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi)$$

El valor medio temporal de la *potencia disipada* valdrá

$$\langle P_{\text{disipada}} \rangle = b \langle v^2(t) \rangle = bv_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2} bv_0^2$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo $v_0 = F_0/Z$ tenemos:

$$\langle P_{\text{disipada}} \rangle = \frac{1}{2} (F_0/Z)^2 b \quad (10.16.a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} (V_0/Z)^2 R \quad (10.16.b)$$

La *potencia absorbida* instantánea en el estado estacionario vendrá dada por:

$$P_{\text{absorbida}} = F(t) \cdot \mathbf{v}(t) = F_0 \cos \omega t \cdot v_0 \cos(\omega t - \varphi) = v_0 F_0 [\cos^2 \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi]$$

Como $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$, y $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, la potencia absorbida en promedio temporal, en el estado estacionario, es

$$\langle P_{\text{absorbida}} \rangle = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \varphi \quad (10.17.a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi \quad (10.17.b)$$

Observemos que la velocidad instantánea tiene una componente en fase con la fuerza y otra desfasada $\pi/2$ con la misma. Sólo la componente en fase contribuye al promedio temporal de potencia.

Sustituyendo en (10.17.a) el valor de $\cos \varphi = b/Z$ y $v_0 = F_0/Z$ tenemos:

$$\langle P_{\text{absorbida}} \rangle = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \varphi = \frac{1}{2} (F_0/Z)^2 b = \langle P_{\text{disipada}} \rangle$$

Coherentemente, en estado estacionario y en valor promedio, la potencia absorbida es igual a la disipada. De ahora en adelante sólo estudiaremos valores promedio temporal de la potencia así, y por simplificar, haremos $\langle P_{\text{absorbida}} \rangle = \langle P_{\text{disipada}} \rangle = \langle P \rangle \equiv P$.

En circuitos eléctricos la ec.(10.17.b) se suele escribir como $P = (\frac{1}{2}) V_0 I_0 \cos \varphi = VI \cos \varphi$, donde $V = V_0/\sqrt{2}$ y $I = I_0/\sqrt{2}$ son los llamados *valores eficaces* de tensión y corriente.

10.9 Estudio de la potencia absorbida en función de la frecuencia. Resonancia

En las igualdades (10.16) podemos observar que la potencia alcanza su valor máximo P_{max} , cuando la impedancia es mínima, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza impulsora coincide con la propia del sistema oscilante, $\omega = \omega_0$; como $Z(\omega_0) = b$

$$P_{\text{max}} = P(\omega_0) = (\frac{1}{2}) F_0^2 / b \quad [P_{\text{max}} = P(\omega_0) = (\frac{1}{2}) V_0^2 / R]$$

En este caso se dice que hay resonancia. Podemos escribir $P(\omega) = P_{\text{max}} (b/Z)^2$, observamos que la potencia tiende a cero tanto si la frecuencia tiende a cero como a frecuencias muy altas, ya que en ambos casos la impedancia tiende a infinito.

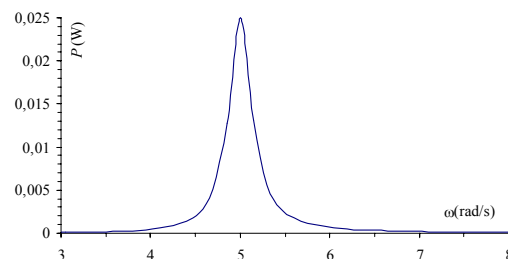


fig 10.11 Potencia media en función de la frecuencia

Con el fin de visualizar la *agudeza de la curva de potencia*, calculemos los valores de ω para los que la potencia de entrada es la mitad de la máxima. Evidentemente esto sucede cuando el cuadrado del módulo de la impedancia es el doble que en resonancia: $Z(\omega)^2 = 2Z(\omega_0)^2 = 2b^2$, para ello es suficiente que la parte real de la impedancia, b , sea igual a la imaginaria en valor absoluto, es decir que se debe cumplir:

$$b = |m\omega - k/\omega| \text{ y por tanto } \rightarrow \text{tg}\phi = \pm\pi/4$$

esta condición se puede escribir como: $\pm b = m\omega - k/\omega$ de donde

$$\omega^2 \pm (b/m)\omega - (k/m) = 0$$

Sustituyendo $b/m = 1/\tau$ y $k/m = \omega_0^2$ se tiene como condición de potencia mitad que ω debe cumplir

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \omega/\tau$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4\tau^2}} \pm \frac{1}{2\tau} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2\tau}$$

en donde se han suprimido las raíces negativas, por falta de sentido físico. Si las dos raíces son ω_1 y ω_2 , tales que $\omega_2 > \omega_1$, entonces

$$\boxed{\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = 1/\tau} \quad (10.19)$$

Si queremos calcular las frecuencias ω_1 y ω_2 , para $Q \gg 1$, o lo que es lo mismo cuando $\tau \gg T$, siendo T el periodo de las oscilaciones libres, podemos tomar como raíces

$$\omega_1 = \omega_0 - (1/2\tau) \quad \text{y} \quad \omega_2 = \omega_0 + (1/2\tau) \quad (10.20)$$

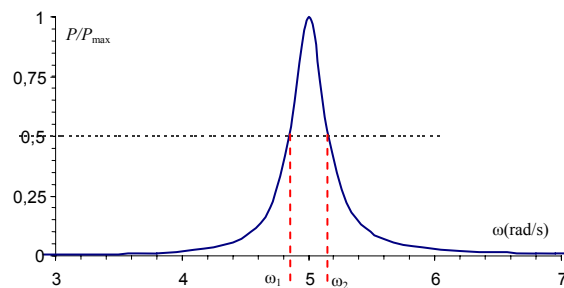


Fig. 10.12 Potencia media normalizada suministrada a un oscilador en función de ω

Así, *la anchura a media altura*, como se muestra en la figura 10.12, *de la curva de resonancia para el oscilador forzado es igual a la inversa del tiempo de relajación del oscilador libre*. $\Delta\omega$ suele recibir el nombre de *ancho de banda*.

El factor de calidad Q nos indica si las oscilaciones libres disminuyen rápida o lentamente y, también, si la resonancia es estrecha o no ya que: $\Delta\omega = \omega_0/Q$. La relación (10.19) es además interesante porque es más fácil medir $\Delta\omega$ que τ .

Todo sistema físico que oscile en torno de un estado de equilibrio mostrando una pérdida exponencial con el tiempo de la energía, mostrará también una respuesta con resonancia ante una excitación exterior.

Ejemplo 10.1

Un oscilador mecánico tiene un amortiguador cuyo coeficiente de rozamiento viscoso es de 0,20 kg/s y su periodo en régimen libre es de 2,0 s. Se puede aproximar el decaimiento de la energía por un exponencial de constante de tiempo 16 s. Calcule los valores:

- de la pérdida relativa de energía en un ciclo y en dos ciclos
- de su masa, m , y de la rigidez, k , de su muelle.

Posteriormente una fuerza armónica exterior de amplitud 1,5 N le hace entrar en régimen permanente sinusoidal a una frecuencia de valor 10/9 de su frecuencia natural

c) calcule su impedancia compleja, la amplitud de su velocidad, y la amplitud de su desplazamiento.

d) dibuje cualitativamente las gráficas superpuestas de su energía cinética $E_k(t)$, potencial $U(t)$ y total $E(t)$, compartiendo los mismos ejes, y calcule los valores máximo y mínimo de $E(t)$

Solución:

a) $\tau = 16$ s y $\omega = 2\pi/T = 3,1$ rad/s; $\omega\tau = 49,6$, como $\omega\tau < \omega_0\tau$, $Q \approx 50$

$$E(t) = E(0)e^{-t/\tau}$$

$[E(0)e^{-7/\tau} - E(0)]/E(0) = e^{-7/\tau} - 1 = e^{-2/16} - 1 = -0,12$, en el primer ciclo pierde un 12 % de la energía inicial. El porcentaje de energía que se pierde es el mismo en cualquier ciclo; lo comprobamos para los dos ciclos

$\Delta E/E = e^{-2T/\tau} - 1 = e^{-4/16} - 1 = -0,22$, en dos ciclos pierde un 22 % de la energía inicial

b) $m = b\tau = 0,2 \cdot 16 = 3,2$ kg, $k = m\omega_0^2 = b\tau\omega_0^2 = 0,2 \cdot 16 \cdot \pi^2 = 32$ N/m

c) $\omega = (10/9)\omega_0 = 35$ rad/s, $Z = b + (m\omega - k/\omega)j = Ze^{j\varphi} = 0,20 + 2,1j = (2,1 \text{ N}\cdot\text{s/m})e^{j1,5}$

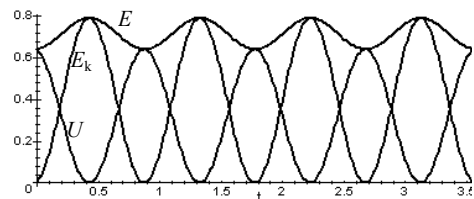
$v_0 = F_0/Z = 0,7$ m/s, $x_0 = v_0/\omega = 0,7/35 = 0,2$ m

d) $E(t) = E_k + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 [\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)]$

Para $\omega = (10/9)\omega_0$:

$E_k(t) = 0,79 \sin^2(\omega t + \delta)$ (J), $U(t) = 0,64 \cos^2(\omega t + \delta)$ (J)

$E(t)_{\max} = E_{k,\max} = 0,79$ J, $E(t)_{\min} = U_{\max} = 0,64$ J



Ejemplo 10.2

Una fuerza sinusoidal, de valor máximo 20 N y frecuencia angular ω variable, impulsa una masa de 1,0 kg, que oscila unida a un muelle. En la figura se muestra la variación de la amplitud al variar la frecuencia de la fuerza aplicada, se observa que $A_{\max} = 0,50$ m y $A(\omega = 0) = 0,05$ m.

a) Estime el factor de calidad del sistema, Q , la frecuencia propia ω_0 y el tiempo de relajación τ .

b) Calcule el coeficiente de amortiguamiento viscoso b , y la constante del muelle k

Se fija la frecuencia de la fuerza en $\omega = \omega_0/2$. Calcule:

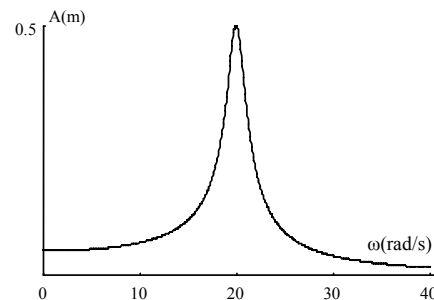
c) las energías cinética y potencial máximas del sistema

d) la energía cinética media y la potencial media

e) la impedancia mecánica del sistema

f) la velocidad (en módulo y fase respecto a la fuerza aplicada)

g) la potencia media disipada.



Solución

La amplitud depende de la frecuencia según la ecuación (10.4). La forma de la curva $A(\omega)$ depende del factor de calidad, Q , del oscilador, como queda de manifiesto escribiendo en $A(\omega)$ en función de Q y la variable adimensional ω/ω_0 , ecuación (10.5). Dada la agudeza de la curva $A(\omega)$ dada podemos estimar que $A_{\max} = A(\omega_0)$ de tal manera que, según la ecuación (10.7)

$$Q \approx \frac{A_{\max}}{A(0)} \approx \frac{0,5}{0,05} = 10$$

y $\omega_0 = 20$ rad/s. Como $Q = \omega_0\tau$,

$$\tau = Q/\omega_0 = 0,5 \text{ s}$$

como $b/m = 1/\tau$ y $k/m = \omega_0^2$ obtenemos

$$b = m/\tau = 2 \text{ kg/s} \quad \text{y} \quad k = \omega_0^2 m = 400 \text{ N/m}$$

c) La energía cinética viene dada por

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

y para $\omega = \omega_0/2$

$$E_k(t) = (1/8) m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t/2 + \delta)$$

tomando de la gráfica $A(\omega = 10) \approx 7 \cdot 10^{-2}$ m tenemos:

$$E_{k,\max} = (1/8) m \omega_0^2 A^2 = 0,25 \text{ J}$$

La energía potencial viene dada por:

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A \cos^2(\omega t + \delta)$$

de donde su valor máximo vale:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = 0,98 \text{ J}$$

d) La energía cinética media para $\omega = \omega_0/2$, viene dada por:

$$\langle E_k(t) \rangle = (1/8) m\omega_0^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{2} E_{k,\max} = 0,12 \text{ J}$$

De igual manera la energía potencial media para $\omega = \omega_0/2$, viene dada por

$$\langle U(t) \rangle = \frac{1}{2} U_{\max} = 0,49 \text{ J}$$

e) La impedancia mecánica, $Z = b + (m\omega - k/\omega)\mathbf{j}$, vale para los datos del ejercicio:

$$Z = 2 - 30\mathbf{j} \text{ (N}\cdot\text{s/m)}$$

o bien $|Z| = 30 \text{ kg/s}$ y $\arg Z = -1,5 \text{ rad } (-86^\circ)$

f) La impedancia mecánica relaciona la fuerza armónica aplicada y la velocidad, así

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{Z}} = \frac{[20\text{N}, 0 \text{ rad}]}{[30\text{kg/s}, -1,5 \text{ rad}]} = [0,67 \text{ m/s}, 1,5 \text{ rad}]$$

g) La potencia media disipada vale:

$$P = (1/2)(F_0/Z)^2 b = (1/2)(20/30)^2 2 = 0,44 \text{ W}$$

Ejemplo 10.3

a) Escriba la ecuación diferencial del circuito RC conectado a una fuente de tensión $V(t) = V_0 \cos \omega t$, tomando como variable la carga del condensador $q(t)$

b) Compruebe que una función de la forma $q(t) = \Re[Ae^{j(\omega t + \delta)}]$, donde $\mathbf{j}$ es la unidad imaginaria, es una solución de la ecuación diferencial del circuito obtenida en a). Calcule la dependencia de las constantes A y δ con los parámetros del circuito y de la fuente, R , C , V_0 y ω

c) Calcule la impedancia del circuito $Z(R, C, \omega)$ y de la expresión de la intensidad de corriente $i(t)$

d) Dibuje un diagrama de fasores representando: $v(t)$, $i(t)$, V_R y V_C

e) Aplicación numérica: calcule Z , i , V_R y V_C para: $V_0 = 5,0 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, $C = 1,0 \mu\text{F}$; considere los siguientes valores de la frecuencia: $\omega = 1,0 \text{ rad/s}$, $\omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad/s}$ y $\omega = 1,0 \times 10^6 \text{ rad/s}$.

Solución

a) La ecuación diferencial del circuito queda definida aplicando la 2ª regla de Kirchhoff

$$Ri + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

y en función de la carga del condensador, como $i = dq/dt$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

b) Para ensayar la función compleja $q(t) = Ae^{j(\omega t + \delta)}$ tomaremos también $V_0 \cos \omega t = \Re[V_0 e^{j\omega t}]$; como

$$\frac{dq}{dt} = j\omega q$$

si q es una solución de la ecuación diferencial se debe cumplir que

$$Rj\omega q + \frac{1}{C} q \equiv V_0 e^{j\omega t}$$

substituyendo $q(t) = Ae^{j\omega t} e^{j\delta}$

$$Rj\omega A e^{j\omega t} e^{j\delta} + \frac{1}{C} A e^{j\omega t} e^{j\delta} \equiv V_0 e^{j\omega t}$$

de donde para que q sea solución debe verificarse que

$$Ae^{j\delta} = \frac{V_0}{\frac{1}{C} + j\omega R} = \frac{V_0}{\frac{1}{C^2} + \omega^2 R^2} \left(\frac{1}{C} - j\omega R \right)$$

para que los complejos de ambos miembros sean iguales deben serlo sus módulos y sus argumentos; de la igualdad de módulos

$$A = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{1}{C^2} + \omega^2 R^2}}$$

y de la igualdad de argumentos

$$\delta = \arctg \frac{-\omega R}{1/C}$$

Así, para estos valores de A y δ , la función

$$q(t) = \Re[q(t)] = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{1}{C^2} + \omega^2 R^2}} \cos(\omega t + \delta)$$

es una solución de la ecuación diferencial

c) La intensidad de corriente, en forma compleja, es

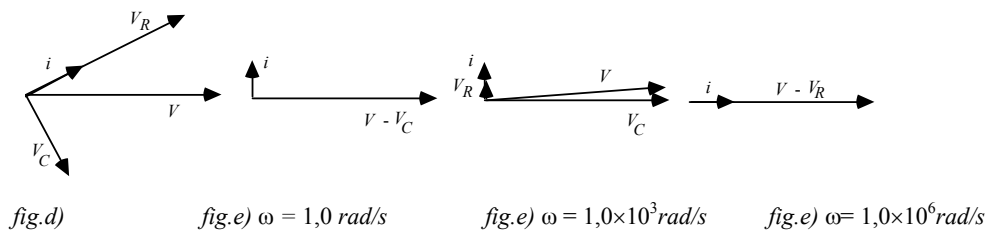
$$i = \frac{dq}{dt} = j\omega q = j\omega A e^{j\omega t} e^{j\delta} = j\omega \frac{V_0}{\frac{1}{C} + j\omega R} e^{j\omega t} = \frac{V}{(\frac{1}{C} + j\omega R) \frac{1}{j\omega}} = \frac{V}{R - \frac{j}{C\omega}}$$

y como la impedancia viene definida por $V = Zi$ tenemos

$$Z = R - \frac{j}{C\omega}$$

La amplitud de la intensidad de corriente es $I_0 = \Re[i] = V_0/Z = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$

d)



e) Para $\omega = 1,0 \text{ rad/s}$

$$Z = 100 - \frac{j}{1,0 \times 10^{-6} \cdot 1,0} \approx 1,0 \times 10^6 j, \quad Z = 1,0 \times 10^6 \Omega, \quad I_0 = V_0/Z = 5,0/1,0 \times 10^6 = 5,0 \mu\text{A}, \quad V_C \approx V_0 = 5,0 \text{ V}$$

Para $\omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad/s}$

$$Z = 100 - \frac{j}{1,0 \cdot 10^{-6} \cdot 1,0 \cdot 10^3} = 100 - 1,0 \times 10^3 j, \quad Z = \sqrt{100^2 + (1,0 \cdot 10^3)^2} \approx 1,0 \times 10^3 \Omega,$$

$$I_0 = V_0/Z = 5,0/1,0 \times 10^3 = 5,0 \text{ mA}, \quad V_R \approx 100 \cdot 5,0 \times 10^{-3} = 0,5 \text{ V}, \quad V_C \approx 1,0 \times 10^3 \cdot 5,0 \times 10^{-3} = 5 \text{ V}$$

Para $\omega = 1,0 \times 10^6 \text{ rad/s}$

$$Z = 100 - \frac{j}{1,0 \cdot 10^{-6} \cdot 1,0 \cdot 10^6} = 100 - j, \quad Z \approx 1,0 \times 10^2 \Omega, \quad I_0 = V_0/Z = 5,0/1,0 \times 10^2 = 50 \text{ mA}$$

$$V_R \approx 100 \cdot 50 \times 10^{-3} = 5 \text{ V}, \quad V_C \approx 1,0 \cdot 50 \times 10^{-3} = 50 \text{ mV}$$

Ejemplo 10.4

Se quiere diseñar un circuito RLC serie que al ser excitado por una tensión armónica de 3,0 V disipe una potencia media máxima de 0,90 W. Su frecuencia de resonancia debe ser igual a $1,0 \times 10^5$ rad/s y el ancho de banda debe suponer un 5 % de dicha frecuencia. Determine los valores de R , L y C que cumplen estos requisitos.

Solución esquemática

Potencia media = $\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi$, Potencia media máxima = $\langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} V_0 I_0$

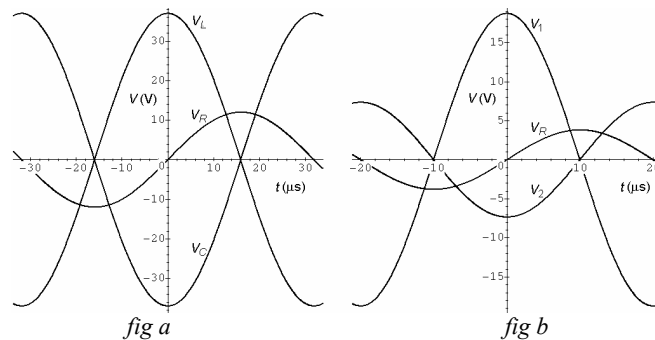
Como en resonancia la impedancia es real e igual a la resistencia óhmica, $V_0 = R I_0$

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{V_0^2}{2R}, \text{ de donde } R = \frac{V_0^2}{2 \langle P \rangle_{\max}} = \frac{3^2}{2 \cdot 0,9} = 5,0 \Omega$$

$$\text{Del enunciado } \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = 0,05, \text{ además } \Delta \omega = 1/\tau = R/L, \text{ por lo tanto } L = \frac{R}{\Delta \omega} = \frac{V_0^2}{2 \cdot 0,05 \omega_0 \langle P \rangle_{\max}} = 1,0 \text{ mH}$$

Ejemplo 10.5

Se dispone de un circuito serie RLC , siendo $R = 1,5 \Omega$, conectado a un generador de tensión sinusoidal de amplitud constante V_G . En las figuras se representan, para dos frecuencias ω_1 (fig. a) y ω_2 (fig. b) del generador, las diferencias de potencial en cada uno de sus componentes en función del tiempo.



Determine:

- la frecuencia de resonancia del oscilador ω_0 y la amplitud V_G
- el coeficiente de autoinducción L y la capacidad C
- el factor de calidad Q y el ancho de banda $\Delta \omega$ del oscilador

Para ω_1 calcule:

- el módulo y la fase de la impedancia del oscilador
- potencia media disipada

Para ω_2 :

- indique si V_1 corresponde a V_L ó V_C
 - calcule módulo y fase de la impedancia del oscilador y
 - la potencia media disipada
- f) si para ω_2 en el instante $t_0 = 0,0 \mu\text{s}$, se cambia el generador por un cortocircuito, escriba la evolución temporal de la tensión del condensador en función de t , $v_C(t)$

Solución

a) En la fig. a observamos que $V_L = V_C$, es decir $L\omega_1 I = (1/C\omega_1)I$, lo que implica que ω_1 es la frecuencia de resonancia, así $\omega_1^2 = \omega_0^2 = (2\pi/T_0)^2$, y como $T_0 = 64 \mu\text{s}$, la frecuencia de resonancia vale:

$$\omega_0 = (2\pi/64 \times 10^{-6})^{1/2} = 9,8 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

Como $v_G = v_R + v_L + v_C$ y $v_L + v_C = 0$, ya que están en oposición de fase y tienen la misma amplitud, tenemos:

$$v_G = v_R \text{ de donde } V_G = V_R = 12 \text{ V}$$

$$\text{b) } V_L = L\omega I = L\omega V_R/R, \quad L = V_L R / \omega_0 V_R = V_L R T_0 / 2\pi V_R = 4,7 \times 10^{-5} \text{ H} = 4,7 \mu\text{H}$$

$$\omega_0^2 = (2\pi/T_0)^2 = 1/LC, C = (1/L)(T_0/2\pi)^2 = (T_0/2\pi)(V_R/V_L R) = 2,2 \times 10^{-6} \text{ F} = 2,2 \text{ }\mu\text{F}$$

$$\text{c) } Q = \omega_0 \tau = \omega_0 (L/R)(I/I) = V_L/V_R = 37/12 = 3,1$$

$$\Delta\omega = 1/\tau = \omega_0/Q = (2\pi/T_0)(V_L/V_R) = 3,2 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\text{d1) } Z(\omega_1) = Z(\omega_0) = R = 1,5 \text{ }\Omega$$

$$\text{d2) } \langle P \rangle = (1/2) R I^2 = (1/2) V_R^2 / R = 48 \text{ W}$$

$$\text{e1) Como } T_b = 40 \text{ }\mu\text{s} < T_a, \omega_b > \omega_0, L\omega_b I_b > (1/C\omega_b) I_b, \text{ por tanto } V_1 \text{ corresponde a } V_L$$

$$\text{e2) } |Z(\omega_1)| = V_G/I_b = V_G/(V_R/R) = 4,5 \text{ }\Omega,$$

$$\text{Como } \mathbf{v}_G = V_R + (V_L - V_C)\mathbf{j}, \varphi = \arctg((V_L - V_C)/V_R) = \arctg((V_1 - V_2)/V_R) = 1,2 \text{ rad}$$

$$\text{e3) } \langle P \rangle = (1/2) R I^2 = (1/2) V_R^2 / R = 5,3 \text{ W}$$

f) La frecuencia de las oscilaciones libres es $\omega = \omega_0[1 - 1/(2Q)^2]^{1/2}$; Q sólo vale 3 pero podemos tomar la frecuencia de las oscilaciones libres como: $\omega = \omega_0$, dada la precisión de las medidas en la gráfica. Como: $v_C(0) = -7 \text{ V}$, $\tau = 1/\Delta\omega = 31 \text{ }\mu\text{s}$

$$v_C(t) = qC = (-7 \text{ V})e^{-t/(62 \text{ }\mu\text{s})}\cos[(9,8 \times 10^4 \text{ rad/s})t]$$