

XVIII OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA

JAÉN
13 a 16 Abril



R.S.E.F.

EJERCICIOS PROPUESTOS Y SOLUCIONES

2007



MINISTERIO
DE EDUCACION
Y CIENCIA



Prueba teórica 1.

Feel free, feel zero-g!

10/50 Puntos

El título de este problema hace alusión a la campaña que, desde hace algunos años, promueve la Agencia Espacial Europea (ESA) y que permite que grupos de jóvenes estudiantes europeos realicen experimentos diseñados por ellos mismos en condiciones de *gravedad aparente nula*. La foto de la figura 1 corresponde a un grupo de la Universidad de Zaragoza en la campaña 2006, a bordo de un avión Airbus A300 preparado para tal fin (figura 2).



Fig. 1



Fig. 2

La descripción de este tipo de vuelos, comúnmente denominados “parabólicos”, se representa esquemáticamente en la figura 3 y es la siguiente: en un principio el avión vuela horizontalmente a su velocidad máxima hasta un punto A. Después se eleva, y cuando alcanza con un ángulo de 45° una altura, $h_B \approx 25.000 \text{ ft}^1$ sobre el nivel del mar (punto B), reduce la potencia de los motores hasta un mínimo suficiente para contrarrestar la disipación de energía producida por la resistencia del aire. En esta primera fase del vuelo AB, que dura un tiempo $t_{AB} = 20 \text{ s}$, los pasajeros sienten que su “peso” casi se duplica. A partir de B el vuelo puede considerarse libre, *¡feel free!* y, por tanto, la trayectoria que describe es parabólica (de ahí el nombre que reciben estos vuelos). El vértice de la parábola (punto C) se encuentra a una altura, $h_C \approx 28.000 \text{ ft}$. Posteriormente, ya iniciado el descenso del avión, en el punto D, situado a una altura similar a la de B, se incrementa de nuevo la potencia de los motores para permitir que en el punto E el aparato recupere el vuelo horizontal. Durante el trayecto B-C-D tanto los pasajeros como la carga transportada se encuentran como si la gravedad se hubiese anulado, *¡feel zero-g!* Sin embargo, durante el trayecto DE, cuya duración es también análoga a la del trayecto AB, sienten de nuevo que su peso casi se duplica.

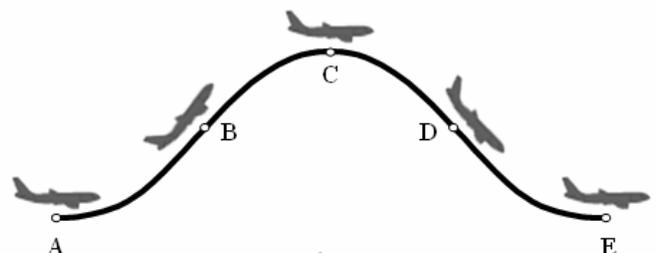


Fig. 3

¹ En aeronáutica se usan asombrosamente las unidades anglosajonas (*imperial units*). La equivalencia del pie, “foot” o abreviadamente ft es $1 \text{ ft} = 0,30480 \text{ m}$

Estas maniobras se repiten 30 veces en cada vuelo, que tiene una duración total de unas dos horas, brindando la oportunidad de realizar interesantes experiencias en ingravidez, imposibles de conseguir en laboratorios en Tierra.

El concepto de “gravedad aparente” al que antes se ha hecho referencia, requiere cierta explicación. Por esta razón, antes de plantear las cuestiones relativas al problema del “vuelo parabólico”, se propone resolver el siguiente ejercicio:

Del extremo inferior de un dinamómetro sujeto al techo de un ascensor se suspende un cuerpo de masa $m = 1$ kg. Como la escala del dinamómetro nos indica, en newtons, la fuerza que el resorte ejerce sobre la masa suspendida, cuando el ascensor está en reposo la indicación numérica de dicha escala coincidirá con el valor numérico de la aceleración de la gravedad.

Más en general, la indicación en la escala del dinamómetro cuando la masa suspendida de su extremo es $m = 1$ kg, nos proporciona el valor numérico de lo que se denomina *gravedad aparente*, g_a .

Según esto, ¿cuál es la gravedad aparente en los siguientes casos:

- A1)** Ascensor que, partiendo del reposo, inicia un movimiento de subida con aceleración constante a .
- A2)** Ascensor que, moviéndose hacia arriba, frena con aceleración constante a .
- A3)** Ascensor que, partiendo del reposo, inicia un movimiento de bajada con aceleración constante a .
- A4)** Ascensor que, moviéndose hacia abajo, frena con aceleración constante a .

Con referencia al “vuelo parabólico”, deduce las expresiones analíticas y estima los valores correspondientes de las siguientes magnitudes:

- B1)** La velocidad del avión en el punto B, v_B .
- B2)** Los valores de la gravedad aparente media, g_{AB} y g_{DE} , en los trayectos AB y DE, respectivamente.
- B3)** El tiempo del que disponen los estudiantes para realizar sus experiencias con gravedad aparente nula en cada maniobra.

Nota: Considera que el valor de la aceleración de la gravedad en puntos próximos a la superficie terrestre es $g_0 = 9,81$ m/s².

Solución

Ejercicio previo

La escala del dinamómetro marca la fuerza (elástica), F_e , que el resorte ejerce sobre la masa suspendida m , cuyo peso es mg_0 .

- A1)** Cuando el ascensor sube con aceleración constante a , $F_e - mg_0 = ma$

Como $m = 1 \text{ kg}$, la indicación numérica de la escala del dinamómetro nos dará el valor de la gravedad aparente. Por tanto,

$$\boxed{g_a = F_e / m = g_0 + a} \quad (1)$$

A2) Cuando el ascensor sube y frena con aceleración constante a , $F_e - mg_0 = m(-a)$

Luego: $\boxed{g_a = F_e / m = g_0 - a} \quad (2)$

A3) Cuando el ascensor baja con aceleración constante a , $F_e - mg_0 = m(-a)$

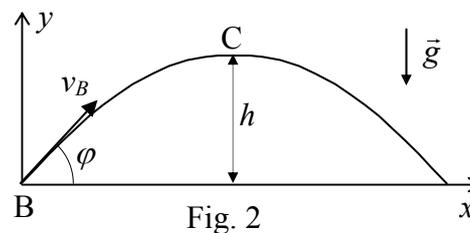
Luego: $\boxed{g_a = F_e / m = g_0 - a} \quad (3)$

A4) Cuando el ascensor baja y frena con aceleración constante a , $F_e - mg_0 = ma$

Por tanto, $\boxed{g_a = F_e / m = g_0 + a} \quad (4)$

Ejercicio del “vuelo parabólico”

B1) El trayecto del avión desde A hasta B, en el que gana una altura $h_B - h_A$, se realiza a costa de la potencia que generan sus motores. Por ello, en este trayecto no se conserva la energía mecánica y en consecuencia no se puede deducir la velocidad en B a partir de la velocidad en A que, por cierto, ni siquiera es un dato del problema.



Sin embargo, y para todos los efectos, en el punto B es como si el avión parara sus motores e iniciara un vuelo libre, con una velocidad inicial v_B que forma un ángulo φ con la horizontal (el bien conocido “tiro oblicuo”), como se muestra en la figura 2.

Omitiendo detalles y comentarios, las expresiones básicas del tiro oblicuo son las siguientes:

Componentes de la aceleración del “proyectil” (en nuestro caso, del propio avión):

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g_0 \end{cases}$$

Componentes de la velocidad: $\begin{cases} v_x = v_B \cos \varphi \\ v_y = v_B \sin \varphi - g_0 t \end{cases}$

Trayectoria: $\begin{cases} x(t) = v_B t \cos \varphi \\ y(t) = v_B t \sin \varphi - \frac{1}{2} g_0 t^2 \end{cases}$

En el punto C la velocidad del avión es horizontal, $v_y = 0$. Si t_{BC} es el tiempo que dura el vuelo entre B y C, tendremos,

$$t_{BC} = \frac{v_B \sin \varphi}{g_0} \quad (5)$$

Como $y(t_{BC}) = h$, siendo $h = h_C - h_B$, resulta

$$v_B = \frac{\sqrt{2g_0 h}}{\sin \varphi}$$

Según el enunciado, $h = h_C - h_B = 3,0 \cdot 10^3 \text{ ft} = 910 \text{ m}$, $\varphi = 45^\circ$ y $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2 \Rightarrow$

$$v_B = 190 \text{ m/s} = 680 \text{ km/h}$$

B2) La componente vertical de la aceleración media del avión en el trayecto AB es el cociente entre la diferencia de las componentes verticales de la velocidad en B y en A (que es nula) y el tiempo de vuelo, $t_{AB} = 20 \text{ s}$, entre A y B,

$$\bar{a}_{AB} = \frac{v_B \sin \varphi}{t_{AB}} \Rightarrow \bar{a}_{AB} = 6,7 \text{ m/s}^2 = 0,68 g_0$$

Por lo que, teniendo en cuenta (1), la gravedad aparente en el avión será

$$g_{AB} = g_0 + \bar{a}_{AB} \Rightarrow g_{AB} = g_0 + \frac{v_B \sin \varphi}{t_{AB}} \Rightarrow g_{AB} = 1,7 g_0$$

En el descenso DE del avión la aceleración vertical media es el cociente entre la diferencia de las componentes verticales de la velocidad en E (que es nula) y en D, que por simetría es la misma que en B pero en sentido contrario, dividido por el tiempo de vuelo entre ambos puntos que, según el enunciado, es prácticamente el mismo que entre A y B. Por lo tanto,

$$\bar{a}_{DE} = \frac{v_B \sin \varphi}{t_{AB}} \Rightarrow \bar{a}_{DE} = 6,7 \text{ m/s}^2 = 0,68 g_0$$

De acuerdo con la expresión (4), la gravedad aparente en DE es

$$g_{DE} = g_0 + \bar{a}_{DE} \Rightarrow g_{DE} = g_0 + \frac{v_B \sin \varphi}{t_{AB}} \Rightarrow g_{DE} = 1,7 g_0$$

B3) Durante el vuelo libre parabólico, trayecto BCD, la aceleración del avión es $-g_0$, por lo que la gravedad aparente es nula

$$g_{BCD} = g_0 + (-g_0) = 0$$

En este trayecto el interior del avión se convierte en un recinto que permite experimentar en estado de ingravidez durante un tiempo, $t_{g=0}$, doble del que transcurre entre B y C, dado en (5). En definitiva,

$$t_{g=0} = 2t_{BC} \Rightarrow t_{g=0} = 2 \frac{v_B \sin \varphi}{g_0} \Rightarrow t_{g=0} = 27 \text{ s}$$

Prueba teórica 2.

Un modelo de molécula de HCl

10/50 Puntos

La molécula de cloruro de hidrógeno está formada por los iones, Cl^- y H^+ . Como la masa del primero es mucho mayor que la del segundo, podemos adoptar como modelo sencillo que el Cl^- está en reposo en $x = 0$ y que el H^+ puede moverse a lo largo del eje X, tal como se representa en la figura 1a.

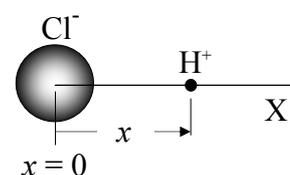


Fig. 1a

Consideraremos que el HCl está en estado gaseoso para que cualquiera de sus moléculas esté poco perturbada por la presencia de otras vecinas. En estas condiciones, el Cl^- de una molécula ejerce una fuerza de atracción electrostática sobre el H^+ . Pero para que el sistema (la molécula de HCl) permanezca en equilibrio con los iones separados una distancia x_e , (fig. 1b), es necesario además que sobre el H^+ se ejerza una fuerza de repulsión, muy fuerte a distancias cortas y que decrezca rápidamente a distancias interiónicas grandes comparadas con la de equilibrio.

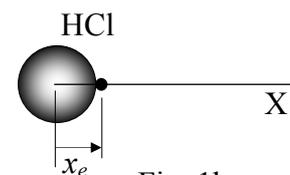


Fig. 1b

Por ello, debido a la presencia del Cl^- , el H^+ tiene una energía potencial² que viene dada por la siguiente expresión:

$$U(x) = -k \frac{e^2}{x} + \frac{B}{x^9}$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ y B es

una constante positiva.

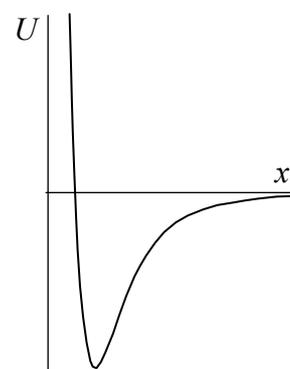


Fig. 2

Esta energía potencial se representa en la figura 2.

- 1) Teniendo en cuenta que en el equilibrio la fuerza sobre el H^+ debe ser nula, determina la distancia de equilibrio x_e .
- 2) Deduce que la expresión de la energía potencial, $U(x)$, puede escribirse en función de x_e de la siguiente forma

$$U(x) = ke^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{x_e^8}{9x^9} \right) \quad (1)$$

El ión H^+ no está nunca en reposo en la posición de equilibrio $x = x_e$. Para “entretenerse” realiza pequeñas oscilaciones en torno a x_e . Esto significa que cuando la distancia de separación es $x \approx x_e$ se comporta como si el H^+ , de masa m_{H} , estuviese unido a un muelle de constante K y, por lo tanto, su energía potencial (elástica) sería

² Recuerda que la diferencia de energía potencial se define a partir de la expresión $dW = F dx = -dU$.

$$U(x) = \frac{1}{2}K(x - x_e)^2 + cte \quad (2)$$

En consecuencia, la expresión de la energía potencial (1) deberá coincidir con (2) cuando $x \approx x_e$.

- 3) Realiza un desarrollo en serie de Taylor³ para $U(x)$ en torno a $x = x_e$, con las aproximaciones que estimes oportuno, y deduce el valor de la constante K de la energía potencial elástica (2).
- 4) Determina la frecuencia de oscilación, f , del H^+ en torno a su posición de equilibrio.
- 5) Experimentalmente se encuentra que $f = 8,66 \cdot 10^{13}$ Hz. Sabiendo que la masa del H^+ es $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, calcula el valor de x_e .
- 6) Determina y calcula la energía, W_d , que hay que aportar a un mol de HCl para separar completamente los iones de cada una de sus moléculas (Energía de disociación). El número de Avogadro es $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas/mol.

Solución

- 1) Si la energía potencial del H^+ es $U(x) = -k \frac{e^2}{x} + \frac{B}{x^9}$, la fuerza que actúa sobre él es

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -ke^2 \frac{1}{x^2} + \frac{9B}{x^{10}}$$

La posición de equilibrio cumple $F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0$, es decir $x_e = \left(\frac{9B}{ke^2}\right)^{1/8}$

- 2) Despejando B en la expresión anterior y sustituyendo en la expresión de $U(x)$,

$$U(x) = ke^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{x_e^8}{9x^9} \right), \text{ como se trataba de demostrar.}$$

- 3) Empleando la expresión del desarrollo de Taylor que se indica en la nota a pie de página, el desarrollo de $U(x)$ resulta

$$U(x) = U(x_e) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_e} (x - x_e)^2 + \dots$$

³ El desarrollo en serie de Taylor de una función $f(x)$ en torno a un punto x_0 es una importantísima herramienta matemática. El desarrollo es:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Como $(dU/dx)_{x_e} = 0$, el primer término del desarrollo es el cuadrático en $x - x_e$. Los siguientes dependen de potencias crecientes por lo que son despreciables frente al anterior, dado que $x - x_e \approx 0$, por lo que

$$U(x) = U(x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_e} (x - x_e)^2$$

Comparando con la expresión (1) de la energía potencial elástica

$$K = \frac{d^2U}{dx^2} = ke^2 \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{10x_e^8}{x^{11}} \right) \Rightarrow \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_e} = \frac{8ke^2}{x_e^3} \Rightarrow \boxed{K = \frac{8ke^2}{x_e^3}}$$

- 4) Si K es la constante del muelle equivalente, la frecuencia angular de las oscilaciones de una masa m es $\omega = \sqrt{K/m}$. En nuestro caso m es la masa del ión hidrógeno, m_H , luego la frecuencia de las oscilaciones será

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_H}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8ke^2}{m_H x_e^3}}}$$

- 5) Despejando x_e de la expresión anterior,

$$x_e = \left(\frac{2ke^2}{\pi^2 f^2 m_H} \right)^{1/3} \Rightarrow \boxed{x_e = 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,155 \text{ nm}}$$

Este resultado es coherente con el valor de la longitud de enlace⁴ del HCl,

$$x_e = 1,2746 \cdot 10^{-10} \text{ m} .$$

- 6) En la figura 2 del enunciado se pone de manifiesto que la energía potencial del ión hidrógeno sólo será nula cuando se encuentre muy alejado del origen, en el que se supone que está el ión Cl^- . Esto equivale a decir “matemáticamente”, que será nula cuando la distancia tienda a infinito. Por tanto, la energía w_d que es preciso aportar a la molécula es igual a $-U(x_e)$, es decir

$$w_d = -U(x_e) = -ke^2 \left(-\frac{1}{x_e} + \frac{x_e^8}{9x_e^9} \right) = \frac{8ke^2}{9x_e} \Rightarrow w_d = 1,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Luego, para disociar un mol de HCl, la energía necesaria será,

$$W_d = N_A w_d \Rightarrow \boxed{W_d = N_A \frac{8ke^2}{9x_e}} \Rightarrow \boxed{W_d = 7,96 \cdot 10^2 \text{ kJ/mol}}$$

⁴ CRC Handbook of Chemistry and Physics. 83rd Edition. 2002.

Prueba teórica 3.

Un prototipo de "gato" termodinámico

10/50 Puntos

Un estudiante aficionado a la física y a la tecnología ha ideado un dispositivo capaz de funcionar como un *gato* que permita levantar cuerpos a pequeñas alturas.

El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico vertical con secciones diferentes; en la parte superior tiene un radio $r_1 = 9,00 \text{ cm}$ y en la inferior $r_2 = 7,00 \text{ cm}$, tal como se representan en la figura 1. Dentro del tubo hay dos émbolos de masas $M_1 = 4,00 \text{ kg}$ y $M_2 = 0,900 \text{ kg}$, unidos mediante una cadena inextensible, de longitud $L = 1,00 \text{ m}$ y masa $m_c = 0,100 \text{ kg}$. Los émbolos, que ajustan perfectamente en el tubo, pueden deslizarse sin fricción. Todos los materiales con los que se ha construido el sistema son perfectos aislantes del calor.

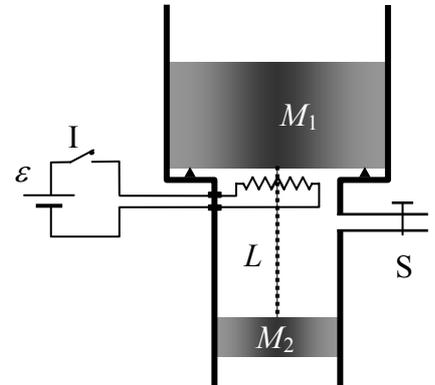


Fig. 1

Mediante la llave S se puede igualar la presión del espacio comprendido entre los émbolos con la atmosférica del exterior, $p_{at} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Con la llave S abierta, la base inferior de M_1 se apoya sobre unos pequeños pivotes que tienen como objeto, entre otros, dejar espacio para alojar una resistencia eléctrica de calefacción que se alimenta con una batería ε cuando se cierra el interruptor I.

Se supone que en el estado inicial (que es el representado en la figura 1), la temperatura de todo el sistema es la ambiente, $T_a = 3,00 \cdot 10^2 \text{ K}$. A continuación, se cierra la llave S y se mantiene cerrada en todo lo que sigue. Considera que el aire se comporta como un gas perfecto diatómico⁵ de densidad $\rho = 1,29 \text{ kg m}^{-3}$.

- 1) Determina la masa de aire, m_{aire} , encerrada entre los émbolos. Comprueba que esta masa es mucho menor que la del sistema deslizante (émbolos + cadena) y, por este motivo, no se considerará en el resto del problema.
- 2) Con objeto de levantar los émbolos (gato termodinámico), al aire encerrado entre ambos se le suministra lentamente calor mediante una resistencia eléctrica. En consecuencia, la presión interior variará. ¿Cuál es el valor de la presión crítica, p_c , para la cual los émbolos comenzarán su ascenso? (Toma $9,81 \text{ m s}^{-2}$ como valor de g).
- 3) Desde el estado inicial hasta que los émbolos comienzan a ascender,

⁵ Calores específicos molares de un gas ideal diatómico, a presión y a volumen constante: $c_v = 5R/2$; $c_p = 7R/2$, donde R es la constante de los gases perfectos.

- a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico ha tenido lugar?
- b) ¿Cuál es la temperatura, T_1 , del aire al comenzar el ascenso?
- c) ¿Cuánto calor, Q_1 , habrá sido necesario suministrar para que M_1 empiece a ascender?
- 4) Una vez que M_1 despega, se produce la acción útil del gato elevando este émbolo hasta una altura $h = 20,0 \text{ cm}$. Supóngase que la elevación es muy lenta para poder despreciar la energía cinética del sistema.
- a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico ha tenido lugar?
- b) Calcula la temperatura, T_2 , del gas al final de este proceso.
- c) ¿Cuánto calor adicional, Q_2 , habrá sido necesario suministrar al gas?
- 5) Si se considera como *trabajo útil* el necesario para levantar el émbolo M_1 la altura h , calcula la relación, expresada en %, entre dicho trabajo y el calor total suministrado, lo que puede llamarse *rendimiento*, η , del proceso.
- 6) Para que el sistema evolucione lentamente, el suministro de calor se realiza mediante una resistencia $r = 1,00 \text{ k}\Omega$ conectada a una batería, de resistencia interna despreciable y fuerza electromotriz $\varepsilon = 50,0 \text{ V}$. Calcula el tiempo, t , que deberá estar conectada la batería durante todo el proceso.
- 7) Representa en un diagrama Presión-Volumen el proceso seguido por el gas (aire) desde el estado inicial hasta que M_1 haya subido la altura h .

Solución

- 1) Despreciando el volumen de la parte ancha del tubo en la que se encuentran los pequeños pivotes y el de la conexión a la llave S, la masa de aire encerrada cuando se cierra la válvula S es

$$m_{\text{aire}} = \rho_{\text{aire}} \pi r_2^2 L \quad \Rightarrow \quad m_{\text{aire}} = 1,99 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \ll M_1, M_2, m_c$$

- 2) Cuando la llave S se cierra, antes de comunicar calor, el aire encerrado entre los émbolos está a la presión atmosférica. Los pivotes que sujetan al conjunto móvil ejercen unas fuerzas normales cuya resultante es

$$N_0 = (M_1 + M_2 + m_c)g$$

Al conectar el interruptor I comenzará la transferencia de calor y la presión del aire interior aumentará. Para una presión $p = p_{at} + \Delta p$, la resultante de las fuerzas de presión sobre los émbolos es $p \Delta A - p_{at} \Delta A = \Delta p \Delta A$ hacia arriba, por lo que el valor de la reacción normal será

$$N = (M_1 + M_2 + m_c)g - \Delta p \Delta A \quad \text{con} \quad \Delta A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

A medida que aumente la presión en el interior, la normal disminuirá hasta que para un valor crítico de la diferencia de presiones, Δp_c , se anule.

$$\Delta p_c = \frac{(M_1 + M_2 + m_c)g}{\Delta A}$$

De donde la presión crítica absoluta es

$$p_c = p_{at} + \frac{(M_1 + M_2 + m_c)g}{\pi(r_1^2 - r_2^2)} \Rightarrow p_c = 1,06 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Como se observa, la presión sólo depende de la masa total y de la geometría del sistema móvil.

- 3a)** Hasta que la presión alcanza el valor crítico, el volumen de aire encerrado entre los émbolos no cambia. En consecuencia, sufre un proceso lento a volumen constante.

Tipo de proceso: a volumen constante (isocoro)

- 3b)** Como la transferencia de calor se realiza lentamente, se puede suponer que todos los estados intermedios son de equilibrio (proceso cuasiestático). Por lo tanto, la ecuación de estado de los gases perfectos permite escribir

$$\left. \begin{aligned} p_{at} V_0 &= nRT_a \\ p_c V_0 &= nRT_1 \end{aligned} \right\}$$

Donde n es el número de moles del aire encerrado, R la constante de los gases, V_0 el volumen de aire inicial y T_1 la temperatura del aire correspondiente a la presión p_c que se trata de determinar. Dividiendo las relaciones anteriores,

$$T_1 = T_a \frac{p_c}{p_{at}} \Rightarrow T_1 = 314 \text{ K}$$

- 3c)** En este proceso a volumen constante, el calor Q_1 que ha sido necesario aportar es

$$Q_1 = n c_v (T_1 - T_a)$$

Teniendo en cuenta que $c_v = 5R/2$ y que $n = \frac{p_{at} V_0}{RT_a}$,

$$Q_1 = \frac{5}{2} p_{at} \pi r_2^2 L \left(\frac{T_1}{T_a} - 1 \right) \Rightarrow Q_1 = 188 \text{ J}$$

- 4a)** A partir del estado de presión crítica, los émbolos comienzan a elevarse manteniendo la presión del aire encerrado constante e igual a p_c , y aumentando el volumen y temperatura del aire encerrado. El proceso se realiza, lentamente, a presión constante.

Tipo de proceso: a presión constante (isobaro)

4b) Razonando de forma análoga que en el apartado 3b, tendremos

$$\left. \begin{aligned} p_c V_0 &= nRT_1 \\ p_c (V_0 + \Delta V) &= nRT_2 \end{aligned} \right\}$$

Donde T_2 es la temperatura final del sistema y ΔV la variación total del volumen de aire correspondiente a la elevación de los émbolos la altura h , cuyo valor es $\Delta V = h\Delta A$. Dividiendo las expresiones anteriores y despejando T_2

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{h(r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 L} \right) \Rightarrow T_2 = 356 \text{ K}$$

4c) Ahora el proceso es a presión constante, y el calor Q_2 aportado será

$$Q_2 = nc_p (T_2 - T_1)$$

Teniendo en cuenta que $c_p = 7R/2$ y que no ha variado el número de moles, resulta

$$Q_2 = \frac{7}{2} \frac{p_{at} \pi r_2^2}{T_a} (T_2 - T_1) \Rightarrow Q_2 = 745 \text{ J}$$

5) Trabajo útil es el que se realiza para elevar el bloque M_1 hasta una altura h

$$W_{\text{útil}} = M_1 g h$$

Energía aportada total

$$W = Q_1 + Q_2$$

El rendimiento es:

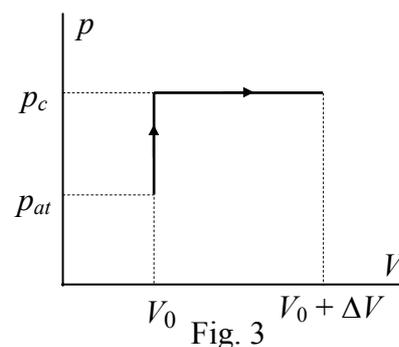
$$\eta = \frac{W_{\text{útil}}}{Q_1 + Q_2} \cdot 100 \Rightarrow \eta = \frac{M_1 g h}{Q_1 + Q_2} \cdot 100 \Rightarrow \eta = 0,84\%$$

Realmente, el gato diseñado es deplorable.

6) El suministro de calor se hace de acuerdo con la ley de Joule:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{\varepsilon^2}{r} t \Rightarrow t = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon^2} r \Rightarrow t = 373 \text{ s} = 6,22 \text{ min}$$

7) Como hemos indicado, los procesos pueden considerarse cuasiestáticos, por lo que pueden representarse en un diagrama P-V. La primera fase del proceso, isocora, la segunda, isobara, se representan cualitativamente (y no a escala) en la figura 3.



Prueba experimental.

20/50 Puntos

Campo magnético de un imán y campo magnético terrestre

Objetivos

Como bien sabes, el campo gravitatorio creado por una partícula decrece con el cuadrado de la distancia. Pero, ¿sabes con qué potencia de la distancia decrece el campo magnético creado por un imán? En la primera parte de esta prueba se determinará experimentalmente cómo es esta dependencia. En la segunda parte se obtendrá la intensidad del campo magnético terrestre y el momento magnético del imán empleado.

Materiales

- Cuatro imanes iguales.
- Papel con transportador de ángulos impreso.
- Regla.
- Palillo de madera.
- Cinta adhesiva.
- Tijeras.
- Hilo.
- Cilindro de PVC.
- Barra de PVC.
- Goma de borrar.
- Cronómetro.

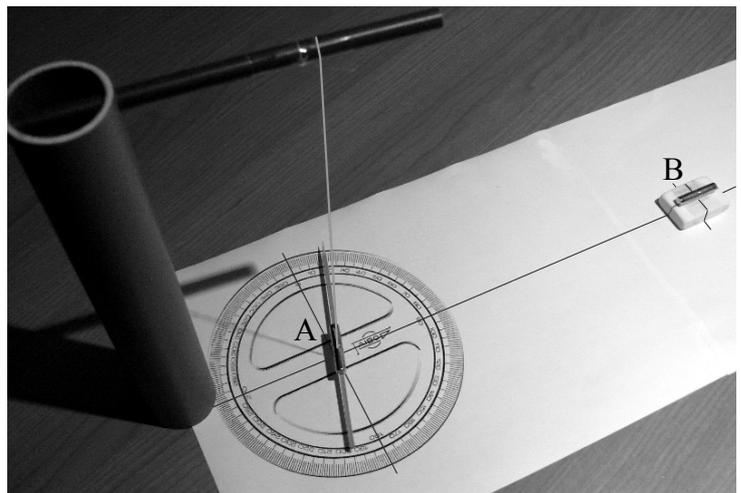


Fig. 1

Montaje

a) En primer lugar hay que montar una brújula, que indicará la dirección del campo magnético. Para ello se van a utilizar dos imanes cilíndricos, unidos longitudinalmente y colgados mediante un hilo de un soporte construido con un tubo y una barra de PVC, como se indica en la figura 1. En adelante, llamaremos "A" a esta pareja de imanes.

Sujeta el hilo a la barra con un trozo de cinta adhesiva y cuelga los imanes A en el otro extremo, pellizcando el hilo entre ambos. La altura de la brújula sobre la mesa puede regularse girando la barra de PVC para enrollar o desenrollar hilo.

Para poder medir en el transportador la dirección de la brújula, sujeta debajo de los imanes A un palillo largo, cortado a la longitud apropiada y bien alineado con el eje de simetría de los imanes.

b) Coloca sobre la mesa el papel con el transportador impreso y la brújula con su soporte de modo que:

- La brújula esté lo más alejada posible de la estructura de hierro de la mesa. Aleja también la otra pareja de imanes para que no influyan en la orientación de la brújula.
- El eje de rotación de la brújula (el hilo) esté exactamente encima del centro del transportador.

- La dirección N-S marcada por la brújula (dirección del palillo) coincide con la línea 0°-180° del transportador.
 - El palillo quede cerca del transportador, sin llegar a rozarlo.
 - Una vez bien alineado el sistema, es conveniente sujetar sus elementos a la mesa con cinta adhesiva para evitar que se muevan accidentalmente.
- c) Para terminar, une longitudinalmente los otros dos imanes (en adelante pareja "B") y pégalos con cinta adhesiva a la goma de borrar (figura 2), para que su altura sea similar a la de los imanes de la brújula. Para facilitar las medidas posteriores, es conveniente dibujar en la goma unas líneas que se crucen en el punto medio de los imanes, como se muestra en la figura 2.

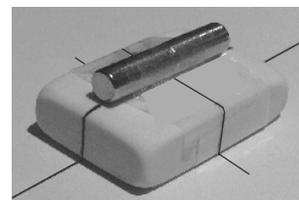


Fig. 2

Procedimiento experimental

Con el montaje anterior, la brújula está inicialmente orientada en la dirección de la componente horizontal del campo magnético de la Tierra (dirección N – S). Si se sitúan en perpendicular (dirección E – O) la pareja de imanes B, la brújula gira hasta orientarse en la dirección del campo magnético total, suma del terrestre y del producido por los imanes B.

En la primera parte de esta prueba experimental se va a medir la desviación angular de la brújula al acercar gradualmente la pareja de imanes B y, a partir de estas medidas, se determinará cómo decrece con la distancia el campo magnético que crean.

En la segunda parte, se medirá el periodo de las oscilaciones torsionales de la brújula, formada ahora por la pareja de imanes B, en presencia del campo terrestre, y se determinará el valor de dicho campo (de su componente horizontal) y del momento magnético de esta pareja de imanes.

Primera Parte. Dependencia con la distancia del campo magnético de un imán

El campo magnético producido por un imán cilíndrico en un punto de su eje de simetría lleva la dirección de dicho eje, y su módulo puede expresarse, en puntos alejados frente al tamaño del imán, en la forma

$$B_m = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^n}$$

donde m es el llamado momento magnético del imán, que caracteriza su "potencia", r es la distancia al centro del imán y n es un número entero positivo que queremos determinar experimentalmente.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$

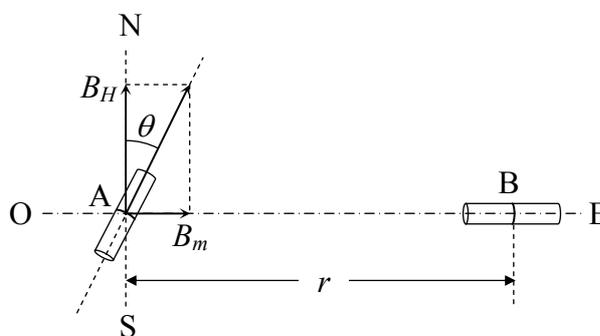


Fig. 3

Con la geometría de nuestro montaje, el campo B_m producido por la pareja de imanes B, orientados en la dirección E - O, es perpendicular a la componente horizontal del terrestre, B_H , de forma que la brújula se orienta a un ángulo θ con la dirección N - S dado por (véase la figura 3)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{B_H} \frac{1}{r^n} \quad (1)$$

- 1) Mide la desviación angular de la brújula para valores de r entre 20 cm y 40 cm, a intervalos de 2 cm.

Para evitar errores sistemáticos debidos a pequeños errores de alineación, es conveniente medir las desviaciones angulares en sentidos opuestos, θ_1 y θ_2 , obtenidas al orientar los imanes B en un sentido u otro sobre la dirección E - O, de forma que se invierta el sentido de B_m . Toma como valor para θ el promedio de estas dos desviaciones.

Sugerencia: dibuja trazos transversales sobre la línea larga de la cruz impresa en el papel, a las distancias r en que vas a realizar las medidas. Estos trazos son fáciles de alinear con las marcas previamente realizadas en la goma, que marcan el punto medio de la pareja B de imanes.

A partir de estas medidas, construye la siguiente tabla, reservando la última columna para el apartado 5.

r	θ_1	θ_2	θ	$\operatorname{tg} \theta$	$\ln(\operatorname{tg} \theta)$	$\ln(r)$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Presenta estos datos en la tabla impresa en la hoja de respuestas.

- 2) Transforma la ecuación (1) y demuestra que es de esperar una dependencia lineal entre $\ln(\operatorname{tg} \theta)$ y $\ln(r)$.
- 3) Representa gráficamente los puntos experimentales $\ln(\operatorname{tg} \theta)$, en ordenadas, frente a $\ln(r)$, en abscisas.
- 4) A partir del ajuste a una línea recta de estos puntos, determina el valor de n . Ten en cuenta que n debe ser un número entero, por lo que debes aproximar el valor obtenido al entero más próximo.
- 5) Completa la última columna de la tabla del apartado 1 con los valores de $1/r^n$.
- 6) Representa gráficamente los puntos $\operatorname{tg} \theta$ frente a $1/r^n$.
- 7) A partir de la representación anterior, y teniendo en cuenta la ecuación (1), determina el valor de m/B_H .

Segunda Parte. Determinación⁶ de B_H y de m .

En el apartado anterior se ha determinado el valor del cociente m/B_H . En esta segunda parte se determinará el valor del producto mB_H a partir del periodo de oscilación de esta pareja de imanes colgada de un hilo, formando una brújula. Una vez conocidos los valores de m/B_H y mB_H , se obtendrán los de m y B_H .

En presencia del campo magnético terrestre, nuestra brújula marca en equilibrio la dirección N – S. Si se le da un pequeño impulso angular (en el sentido de retorcer el hilo del que cuelgan los imanes), oscila en torno a la dirección de equilibrio. Este sistema oscilante constituye un *péndulo de torsión*. El par de fuerzas que tiende a llevar la brújula a su orientación de equilibrio se debe a la interacción entre el campo magnético de la Tierra (componente horizontal), B_H , y el momento magnético de la brújula, m . Despreciando el pequeño efecto recuperador debido a la torsión del hilo, se demuestra que el periodo T de pequeñas oscilaciones torsionales de la brújula es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}} \quad (2)$$

donde I es el *momento de inercia* de la brújula. Esta magnitud representa la inercia de un objeto a cambiar su movimiento de rotación. Depende de la masa del objeto y de su distribución respecto al eje de rotación. Si el cuerpo es un cilindro recto de masa M , longitud L y radio R , que gira respecto a un eje perpendicular al eje principal de simetría por el punto medio (como es nuestro caso), el valor de I se obtiene en la forma

$$I = MR^2 / 4 + ML^2 / 12$$

Emplea como brújula la pareja de imanes B colgada del soporte, como la pareja A en la primera parte pero sin el palillo. Aleja los imanes A para que no influyan en la medida.

- 8) Calcula el momento de inercia de la brújula respecto al eje de rotación indicado, I .
Datos de cada uno de los dos imanes: masa $M_i = 3,10$ g, longitud $L_i = 15,0$ mm y diámetro $D_i = 6,0$ mm.
- 9) Coloca la brújula en, aproximadamente, la misma posición sobre la mesa que en la primera parte, para que el valor de B_H no cambie apreciablemente debido a la estructura metálica de la mesa. Gira la brújula respecto a su orientación de equilibrio y suéltala para que realice pequeñas oscilaciones torsionales. Mide el periodo, T , de estas oscilaciones. Describe detalladamente el método de medida que has empleado.
- 10) Utiliza la ecuación (2) para calcular el valor de mB_H . Combina este resultado con el valor de m/B_H obtenido en el apartado 7 y calcula los valores de m y B_H .
- 11) Haz una estimación de la incertidumbre (margen de error) del valor de T obtenido en el apartado 9. Teniendo en cuenta sólo esta fuente de error experimental, calcula la incertidumbre de los valores de m y B_H obtenidos en el apartado 10.

⁶ La determinación precisa del campo magnético terrestre requiere hacer el experimento en un lugar alejado de objetos y estructuras de hierro, lo que no es posible en nuestro caso. El valor que se obtenga para B_H corresponderá al campo magnético local existente en la posición de la brújula.

Solución

1) Medidas y cálculos

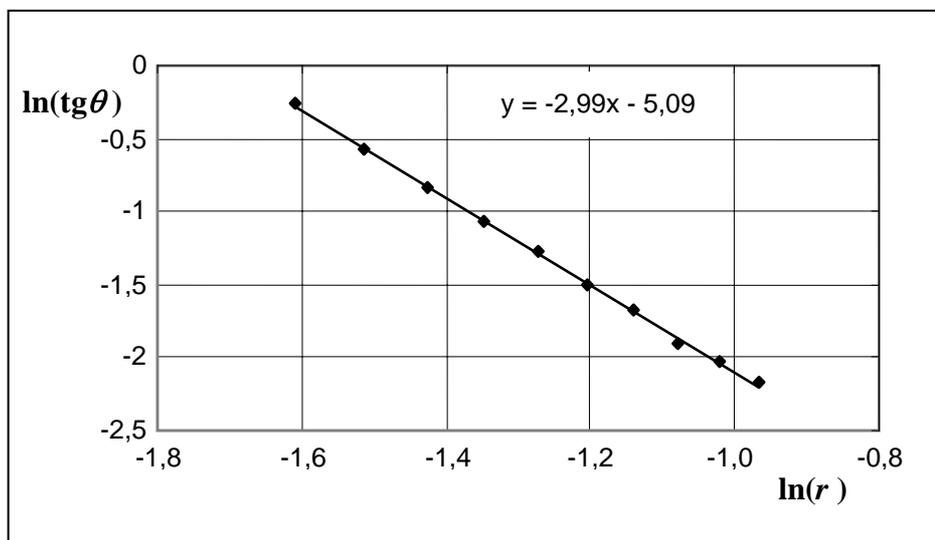
Medida	r (m)	θ_1 (°)	θ_2 (°)	θ (°)	$\text{tg}\theta$	$\ln(\text{tg}\theta)$	$\ln(r)$	$1/r^3$ (m ⁻³)
1	0,380	6	7	6,5	0,1139	-2,172	-0,968	18,22
2	0,360	7	8	7,5	0,1317	-2,028	-1,022	21,43
3	0,340	8	9	8,5	0,1495	-1,901	-1,079	25,44
4	0,320	10	11	10,5	0,1853	-1,686	-1,139	30,52
5	0,300	12	13	12,5	0,2217	-1,506	-1,204	37,04
6	0,280	15	16	15,5	0,2773	-1,283	-1,273	45,55
7	0,260	19	19	19,0	0,3443	-1,066	-1,347	56,90
8	0,240	23	24	23,5	0,4348	-0,833	-1,427	72,34
9	0,220	29	30	29,5	0,5658	-0,570	-1,514	93,91
10	0,200	37	38	37,5	0,7673	-0,265	-1,609	125,0

$$2) \quad \text{tg}\theta = \frac{\mu_0 m}{2\pi B_H} \frac{1}{r^n} \quad (1)$$

Tomando logaritmos, la ecuación que se pide es

$$\ln(\text{tg}\theta) = \ln\left(\frac{\mu_0 m}{2\pi B_H}\right) - n \ln(r) \quad (2)$$

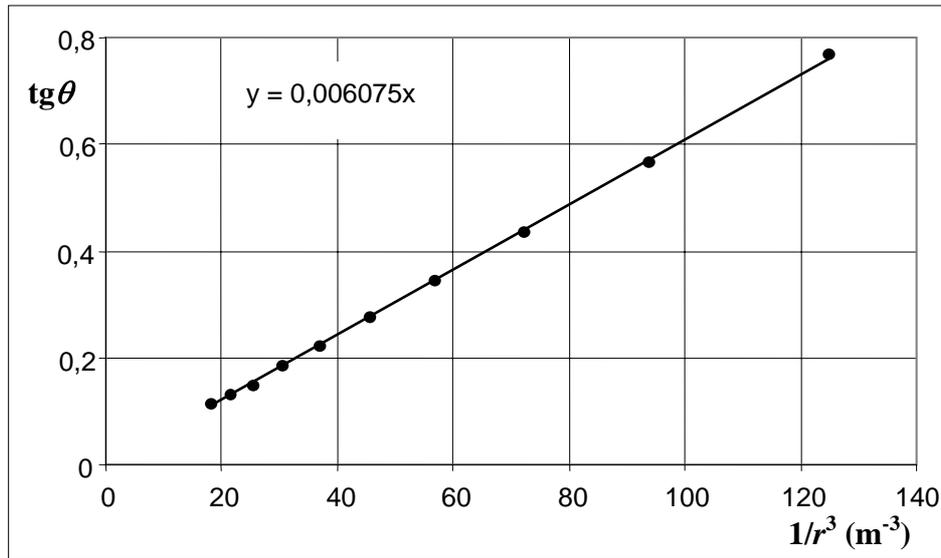
3) Gráfica de $\ln(\text{tg}\theta)$ frente a $\ln(r)$.



4) Se obtiene $n = 2,99$. Por tanto $n = 3$.

5) Los valores de $1/r^3$ se presentan en la última columna de la tabla del apartado 1.

6) Gráfica de $\text{tg}\theta$ frente a $1/r^3$.



7) Según (1), la pendiente de esta gráfica es $\frac{\mu_0 m}{2\pi B_H} = 6,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, de donde

$$\boxed{\frac{m}{B_H} = 3,04 \cdot 10^4 \text{ A}^2 \text{m}^3 \text{N}^{-1}} \quad (3)$$

8) Momento de inercia. Para $M = 6,20 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $L = 30,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ y $R = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, resulta

$$I = (0,14 + 4,65) \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \rightarrow \boxed{I = 4,79 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2}$$

9) Medida del periodo de oscilación de la brújula.

Nº oscilaciones	10	10	10	10	10	10
Tiempo (s)	9,40	9,39	9,76	9,62	9,29	9,54
Periodo, T (s)	0,940	0,939	0,976	0,962	0,929	0,954

$$\rightarrow \boxed{\bar{T} = 0,950 \text{ s}}$$

$$10) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}} \rightarrow mB_H = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad (4)$$

$$\rightarrow \boxed{mB_H = 2,10 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}} \quad (5)$$

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (3) y (5) conduce a

$$\boxed{\begin{aligned} B_H &= 2,63 \cdot 10^{-5} \text{ T} \\ m &= 0,798 \text{ A m}^2 \end{aligned}}$$

11) Precisión de los resultados: El error típico del periodo de oscilación, determinado en el apartado 9 como promedio de seis medidas, es

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum (\bar{T} - T_i)^2}{6 \times 5}} = 0,007 \text{ s}$$

El número de medidas no es muy elevado, por lo que una estimación razonable de la incertidumbre del periodo obtenido podría ser⁷

$$\boxed{\Delta T = 0,01 \text{ s}}$$

Para calcular los errores transmitidos a los valores de m y B_H es conveniente obtener la dependencia explícita de ambos con el periodo de oscilación. A partir de (4) y del valor numérico de $m/B_H = k$, dado en (3), se obtiene

$$B_H = 2\pi \frac{1}{T} \sqrt{\frac{I}{k}}$$

$$m = 2\pi \frac{1}{T} \sqrt{kI}$$

Las incertidumbres transmitidas a m y B_H pueden calcularse en la forma

$$\Delta B_H = \left| \frac{\partial B_H}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{2\pi}{T^2} \sqrt{\frac{I}{k}} \Delta T = \frac{B_H}{T} \Delta T = 3 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$\Delta m = \left| \frac{\partial m}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{2\pi}{T^2} \sqrt{kI} \Delta T = \frac{m}{T} \Delta T = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A m}^2$$

Estos márgenes de error también pueden calcularse de una forma directa evaluando B_H y m para los valores extremos de T , dentro del intervalo de incertidumbre estimado

$$\Delta B_H = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \left[\frac{1}{T - \Delta T} - \frac{1}{T + \Delta T} \right] = 3 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$\Delta m = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{kI} \left[\frac{1}{T - \Delta T} - \frac{1}{T + \Delta T} \right] = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A m}^2$$

Los resultados finales para B_H y m son, con incertidumbres transmitidas⁸

$$\boxed{B_H = (2,63 \pm 0,03) \cdot 10^{-5} \text{ T}}$$

$$\boxed{m = (0,798 \pm 0,008) \text{ A m}^2}$$

Notas:

El valor del exponente $n = 3$ puede considerarse libre de error, ya que es entero.

El error típico relativo de la pendiente de la gráfica en el apartado 6, que permite determinar m/B_H , es del orden del 0,3%. Por tanto, para el conjunto de medidas que se presentan, la influencia de esta fuente de error en el resultado final es prácticamente despreciable frente a la del periodo de oscilación.

⁷ Un cálculo estadístico más exacto conduce a que, con un nivel de confianza del 95%, $\Delta T = 0,018 \text{ s}$.

⁸ En ambos casos, las incertidumbres relativas son del orden del 1%. Esto era de esperar pues el error relativo de T es de este mismo orden, y tanto B_H como m son inversamente proporcionales a T .

Tablas de respuestas de los problemas teóricos

Problema teórico 1.

Apartado	Expresiones analíticas	Resultados numéricos	Puntos
A1	$g_a = g_0 + a$		1
A2	$g_a = g_0 - a$		1
A3	$g_a = g_0 - a$		1
A4	$g_a = g_0 + a$		1
B1	$v_B = \frac{\sqrt{2g_0h}}{\sin\varphi}$	$v_B = 190 \text{ m/s} = 680 \text{ km/h}$	1 + 0,5
B2	$g_{AB} = g_0 + \frac{v_B \sin\varphi}{t_{AB}} ; \quad g_{DE} = g_0 + \frac{v_B \sin\varphi}{t_{AB}}$	$g_{AB} = 1,7 g_0$ $g_{DE} = 1,7 g_0$	1 + 0,5 1 + 0,5
B3	$t_{g=0} = 2 \frac{v_B \sin\varphi}{g_0}$	$t_{g=0} = 27 \text{ s}$	1 + 0,5

Problema teórico 2.

Apartado	Expresiones analíticas	Resultados numéricos	Puntos
1º	$x_e = \left(\frac{9B}{ke^2}\right)^{1/8}$		2,0
2º	$U(x) = ke^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{x_e^8}{9x^9}\right)$		1,0
3º	$K = \frac{8ke^2}{x_e^3}$		2,0
4º	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8ke^2}{m_H x_e^3}}$		2,0
5º		$x_e = 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,15 \text{ nm}$	1,0
6º	$W_d = N_A (-U(x_e)) = N_A \frac{8ke^2}{9x_e}$	$W_d = 7,96 \cdot 10^2 \text{ kJ/mol}$	1,5 + 0,5

Problema teórico 3.

Apartado	Expresiones analíticas	Resultados numéricos	Puntos
1º		$m_{aire} = 1,99 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$	0,25
2º	$p_c = p_{at} + \frac{(M_1 + M_2 + m_c)g}{\pi(r_1^2 - r_2^2)}$	$p_c = 1,06 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	2,0 + 0,25
3º	a) Tipo de proceso: a volumen constante (isocoro).		0,25
	b) $T_1 = T_a \frac{p_c}{p_{at}}$	$T_1 = 314 \text{ K}$	1,0 + 0,25
	c) $Q_1 = \frac{5}{2} p_{at} \pi r_2^2 \left(\frac{T_1}{T_a} - 1 \right)$	$Q_1 = 188 \text{ J}$	1,0 + 0,25
4º	a) Tipo de proceso: a presión constante (isobaro).		0,25
	b) $T_2 = T_1 \left(1 + \frac{h(r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 L} \right)$	$T_2 = 356 \text{ K}$	1,0 + 0,25
	c) $Q_2 = \frac{7}{2} \frac{p_{at} \pi r_2^2}{T_a} (T_2 - T_1)$	$Q_2 = 745 \text{ J}$	1,0 + 0,25
5º	$\eta = \frac{M_1 g h}{Q_1 + Q_2} \cdot 100$	$\eta = 0,84\%$	0,5 + 0,25
6º	$t = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon^2} r$	$t = 373 \text{ s} = 6,22 \text{ min}$	0,5 + 0,25
7º			0,5