1. MOVIMIENTO OSCILATORIO

1.1 Movimiento armónico

Uno de los movimientos más importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio. Una partícula oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a la posición de equilibrio tal y como ocurre por ejemplo en los péndulos, en masas sujetas a muelles ó a átomos y electrones en los sólidos. De todos los movimientos oscilatorios el más importante es el movimiento armónico que constituye una aproximación muy cercana a muchas de las oscilaciones encontradas en la naturaleza.

Consideremos una masa m en una posición de equilibrio y sujeta a una fuerza de recuperación proporcional al desplazamiento x del equilibrio y opuesta a él según la ecuación

$$F= -kx \qquad [1.1]$$

donde k es la denominada constante de fuerza. La energía potencial U asociada a esta fuerza conservativa viene dada por F= -gradU.

$$U= \frac{1}{2}kx^2 \qquad [1.2]$$

Suponiendo que no actua ninguna otra fuerza sobre el cuerpo, y aplicando la segunda ley de Newton (F= m.a) obtendremos la ecuación diferencial del movimiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \qquad [1.3]$$

que describe un oscilador armónico simple. Tal y como veremos el movimiento es una oscilación sinusoidal alrededor de la posición de equilibrio. En todos los casos físicos existe alguna fuerza de rozamiento que generalmente se considera proporcional a la velocidad quedando la ecuación diferencial de movimiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad [1.4]$$

que describe un oscilador armónico amortiguado consistente en una oscilación sinusoidal cuya amplitud decrece gradualmente con el tiempo. Cuando adicionalmente el oscilador está sometido a una fuerza externa tenemos un oscilador armónico forzado y su movimiento vendrá dado por la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F(t) \qquad [1.5]$$

Si F(t) es una fuerza que varía sinusoidalmente, la ecuación [1.5] conduce al fenómeno de la resonancia para el cual la amplitud de la oscilación llega a hacerse muy grande cuando la frecuencia de la fuerza aplicada coincide con la frecuencia natural del oscilador libre.

1.2 Oscilador armónico simple

Consideremos la ecuación diferencial del movimiento armónico simple (MAS) [1.3]

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \qquad [1.6]$$

La solución de esta ecuación diferencial de 2º orden es

$$x = Ae^{i(wt+d)} = A\cos(wt+d) + iAsen(wt+d) \qquad [1.7]$$

donde tanto la parte real como la imaginaria son solución de la ecuación [1.6]. Quedándonos con la parte real como solución tenemos que el MAS viene dado por

$$x = A\cos(wt+d) \qquad [1.8]$$

movimiento representado en la figura 1.1, donde A es la amplitud del movimiento, desplazamiento máximo respecto a la posición de equilibrio, y δ la constante de fase, ambas constantes determinadas por las condiciones iniciales de posición y velocidad. La cantidad $(wt+\delta)$ recibe el nombre de fase del movimiento. La función coseno se repite cada vez que el ángulo aumenta en 2π. Por consiguiente el desplazamiento de la partícula se repite después de un intervalo de tiempo $2\pi/w$.

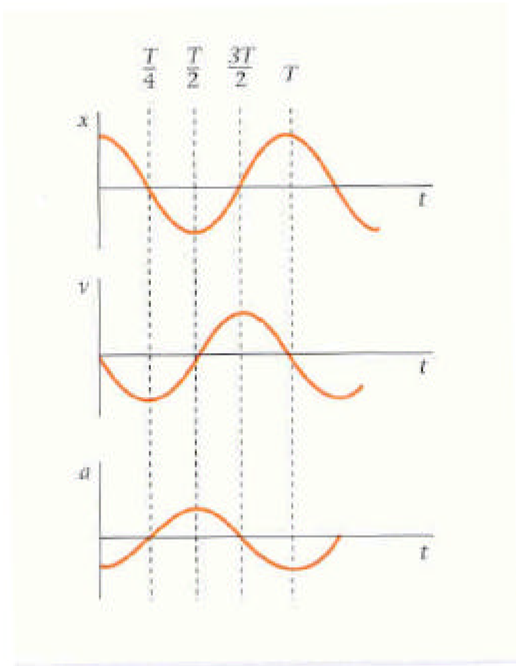

Figura 1.1. Movimiento armónico simple

Luego el MAS es periódico y su periodo, tiempo empleado para realizar una oscilación completa alrededor de la posición de equilibrio, es T= 2π/w. La frecuencia f de un MAS, número de oscilaciones por segundo, es igual al recíproco del periodo f= w/2π y se mide en s^{-1} unidad denominada Herzio (Hz). Finalmente w recibe el nombre de frecuencia angular y se mide en radianes s^{-1}.

La velocidad del cuerpo sometido a un MAS se deduce de la ecuación

$$v = \frac{dx}{dt} = -Awsen(wt + d) \qquad [1.9]$$

y la aceleración

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 A\cos(wt + d) = -w^2 x \qquad [1.10]$$

Comparando esta ecuación con la [1.6] llegamos a que la frecuencia angular de un MAS toma un valor igual a

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad [1.11]$$

aumentando cuando se incrementa la constante k, se incrementa la fuerza de recuperación, ó cuando disminuye la masa m del cuerpo. En un MAS, la frecuencia angular w, y por tanto la f y el T, son independientes de la amplitud A.

La energía total de un objeto sometido a un MAS será igual a la suma de su energía cinética y potencial. Consideremos un objeto a una distancia x del equilibrio sobre el que actúa una fuerza de recuperación –kx. La energía potencial viene dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt + d) \qquad [1.12]$$

La energía cinética valdrá

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(wt + d) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \qquad [1.13]$$

con lo que la energía total del sistema es igual a

$$E_T = U + E_c = \frac{1}{2}kA^2(\cos^2(wt + d) + sen^2(wt + d))$$
$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \qquad [1.14]$$

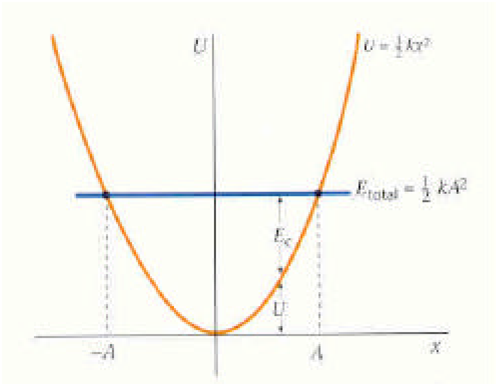

Figura 1.2. Energía de un MAS como suma de su energía potencial y cinética

La energía total de MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud. Tal y como se muestra en la figura 1.2 el objeto en su desplazamiento máximo, la energía total es todo potencial. Cuando el objeto se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía cinética del sistema crece y la potencial disminuye hasta llegar a la posición de equilibrio donde toda la energía es cinética.

Existe una relación entre el MAS y el movimiento circular con velocidad constante. Consideremos una partícula que se mueve con velocidad constante sobre una circunferencia de radio A como se indica en la figura 1.3. El desplazamiento angular de la partícula respecto al eje x viene dado por

$$q = wt + d \qquad [1.15]$$

en donde δ es el deplazamiento angular en t= 0 y w=v/A es la velocidad angular de la partícula. La componente x de la posición de la partícula es

$$x = a\cos q = A\cos(wt + d) \qquad [1.16]$$

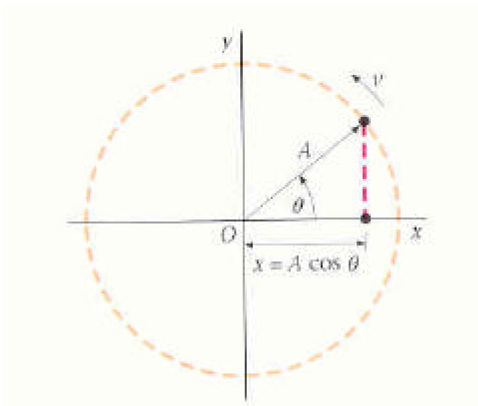

Figura 1.3 Representación del MAS como un movimiento circular de velocidad constante denominado vector rotante

que coincide con la ecuación de movimiento de un MAS. Por tanto la proyección sobre un diámetro de una partícula que se mueve con un movimiento circular uniforme, según un vector denominado vector rotante, es un MAS. El uso de los vectores rotantes será de gran utilidad a la hora de componer movimientos resultantes de la suma de varios movimientos periódicos, tal y como veremos en apartados y capítulos sucesivos.

1.3 Superposición de movimientos armónicos simples.

Consideremos la superposición ó interferencia de 2 MAS bajo la siguiente hipótesis: la resultante de dos ó más oscilaciones armónicas es simplemente la suma de las oscilaciones aisladas. Los casos que analizaremos son los siguientes

<u>1.3.1 Superposición de dos MAS de igual dirección y frecuencia</u>. Supongamos 2 MAS superpuestos de igual frecuencia y diferente fase que producen el desplazamiento de la partícula a lo largo de la misma línea

$$x_1 = A_1 \cos(wt + \alpha_1) \qquad\qquad [1.17]$$
$$x_2 = A_2 \cos(wt + \alpha_2)$$

El desplazamiento resultante de la partícula está dado por la suma

$$x = A_1 \cos(wt + \alpha_1) + A_2 \cos(wt + \alpha_2) \qquad\qquad [1.18]$$

representado en la figura 1.4.

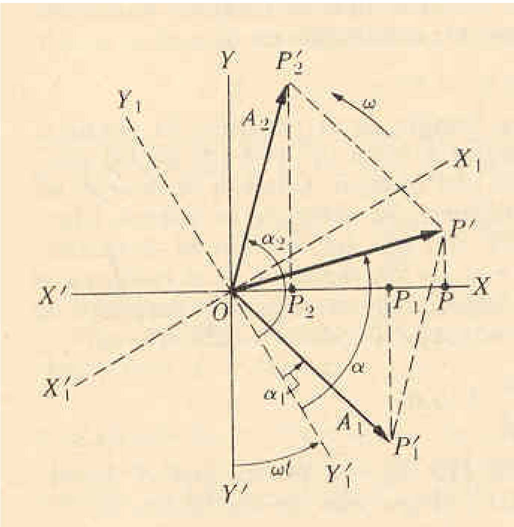

Figura 1.4. Suma de los vectores rotantes de los MAS 1 y 2

Este movimiento se puede expresar como un MAS dado por la expresión

$$x = A\cos(wt + \alpha) \qquad\qquad [1.19]$$

deduciendo a partir de la suma de los vectores rotantes de la figura 1.4

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad\qquad [1.20]$$
$$tg\alpha = \frac{A_1 sen\alpha_1 + A_2 sen\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

Analizemos algunos casos especiales. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ decimos que los 2 movimientos están en fase dado que la diferencia de fase $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Sus vectores rotantes son paralelos y la ecuación [1.20] da

$$A = A_1 + A_2 \qquad\qquad [1.21]$$
$$\alpha = \alpha_1$$

interfiriendo constructivamente ya que sus amplitudes se suman como se observa en la figura 1.5.a. Si $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ entonces la diferencia de fase $\delta = \pi$ y se dice que los 2 MAS están en oposición, suc vectores rotantes son antiparalelos y como queda representado en la figura 1.5.b

$$A = A_1 - A_2$$
$$\alpha = \alpha_1 \qquad [1.22]$$

Finalmente, si $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ entonces $\delta = \pi/2$ y se dice que los 2 MAS están en cuadratura obteniéndose el MAS representado en la figura 1.5.c donde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$
$$\alpha = \alpha_1 + arctg\frac{A_2}{A_1} \qquad [1.23]$$

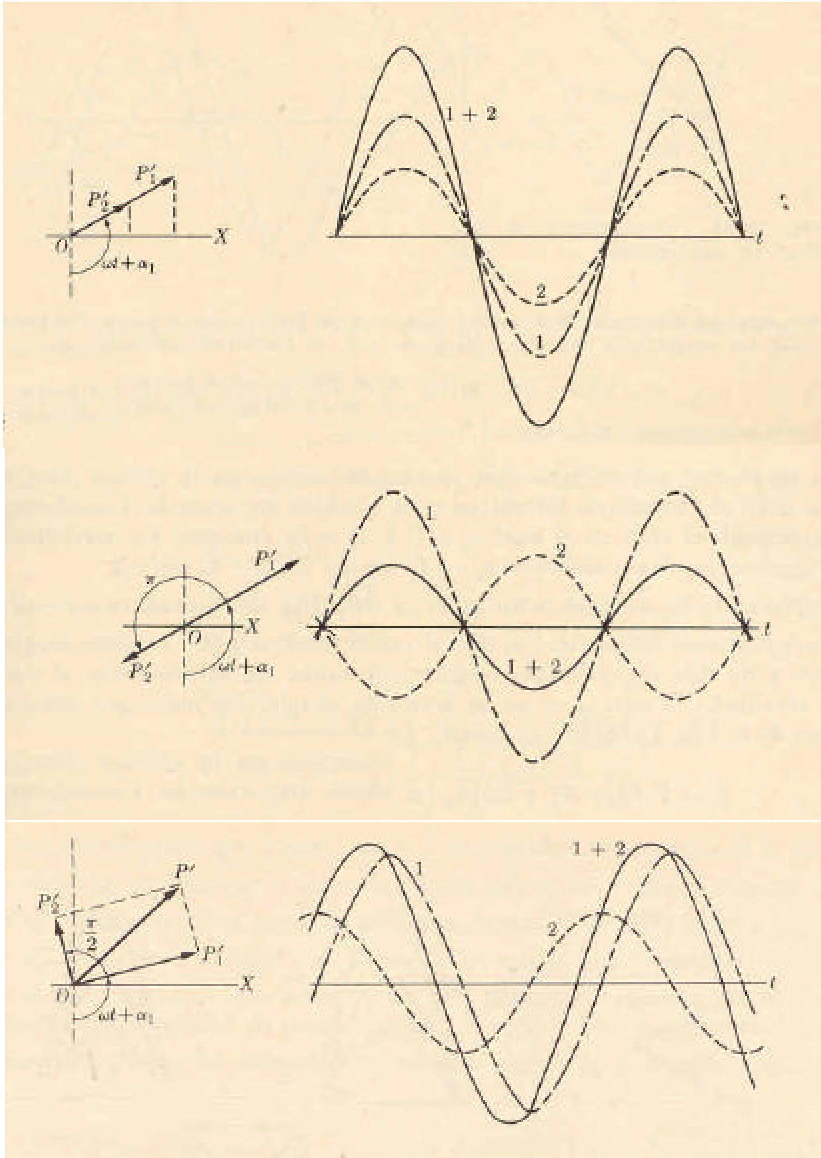

Figura 1.5. Suma de 2 MAS de igual dirección y f en a) fase, b) oposición y c) cuadratura

1.3.2 Superposición de dos MAS de igual dirección y diferente frecuencia. Consideremos dos oscilaciones descritas por

$$x_1 = A_1 \cos(w_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(w_2 t) \qquad [1.24]$$

donde por simplificar se ha considerado que las fases iniciales son cero. El ángulo entre los vectores rotantes OP_1 y OP_2 de la figura 1.6, $(\omega_2\text{-}\omega_1)t$ no es constante con lo que el vector suma resultante OP no tiene una longitud constante. Esto implica que el movimiento suma x_1+x_2 no es armónico simple. La amplitud del movimiento suma viene dada por la ecuación

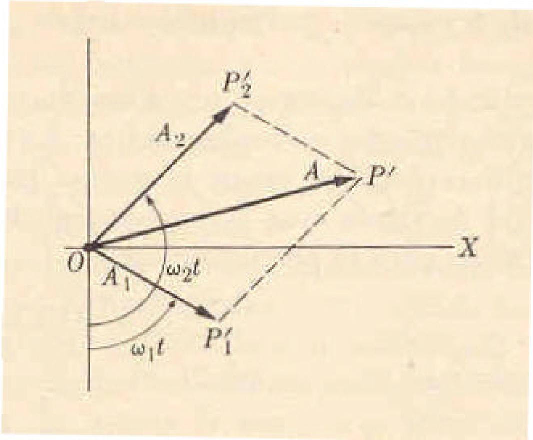

Figura 1.6. Suma de 2 MAS de igual dirección y distinta f

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(w_2 - w_1)t]} \qquad [1.25]$$

oscilando la amplitud entre los valores, figura 1.7

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{para } (\omega_2\text{-}\omega_1)t = 2\pi n \qquad [1.26]$$
$$A = |A_1 - A_2| \quad \text{para } (\omega_2\text{-}\omega_1)t = 2\pi n + \pi$$

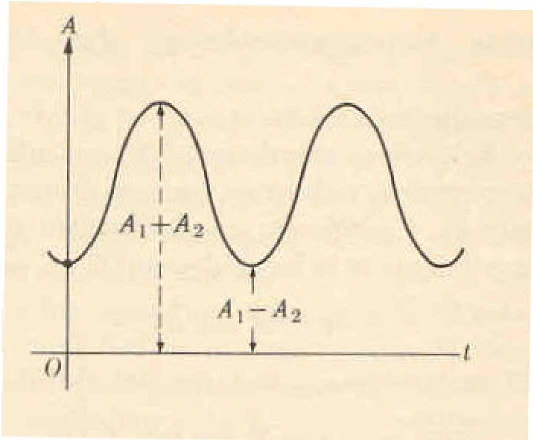

Figura 1.7. Amplitud modulada del movimiento suma

diciéndose entonces que tenemos una amplitud modulada. Un ejemplo de este comportamiento lo constituyen dos diapasones de frecuencias cercanas pero diferentes que vibran simultaneamente en lugares cercanos. Se escucha una nota pero con una fluctuación en la intensidad del sonido llamada pulsación. Una situación interesante ocurre cuando las 2 amplitudes son iguales $A_1=A_2$ obteniéndose una amplitud total

$$A = 2A_1 \cos\frac{1}{2}(w_1 - w_2)t \qquad [1.27]$$

y una ecuación de movimiento

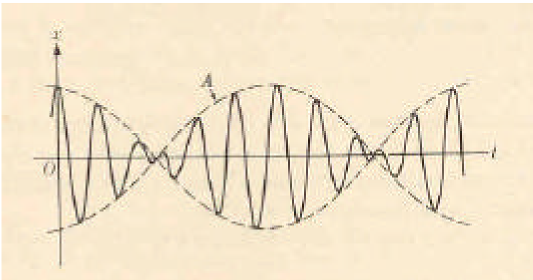

Figura 1.8. Modulación cuando las dos amplitudes son iguales

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\cos w_1 t + \cos w_2 t) = 2A_1 \cos\frac{1}{2}(w_1 - w_2)t \cos\frac{1}{2}(w_1 + w_2)t$$
$$x = A\cos\frac{1}{2}(w_1 + w_2)t \qquad [1\text{-}28]$$

movimiento representado en la figura 1.8 donde la línea punteada representa la modulación de la amplitud.

<u>1.3.3 Superposición de dos MAS en direcciones perpendiculares</u>. Consideremos ahora el caso de una partícula que se mueve en un plano de tal modo que sus coordenadas x e y oscilan con MAS de igual frecuencia

$$x = A\cos wt$$
$$y = B\cos(wt + d) \qquad [1.28]$$

donde δ es la diferencia de fase entre las oscilaciones. Analicemos algunos casos especiales representados en la figura 1.9.

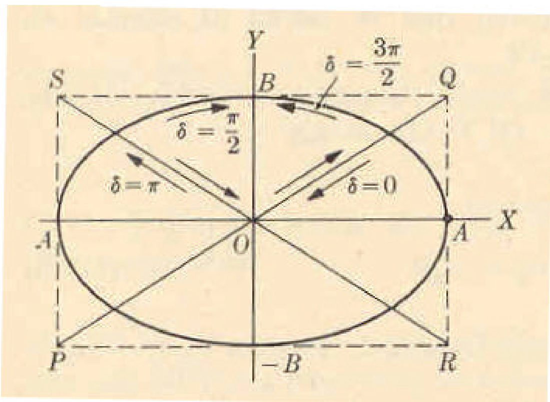

Figura 1.9 Superposición de 2 MAS en direcciones perpendiculares y f iguales

a) Si los dos movimientos están en fase δ= 0 e y= Bcosωt es decir

$$y = \frac{B}{A}x \qquad [1.29]$$

que es la ecuación de una recta, PQ en la figura, y el movimiento resultante es MAS con amplitud $\sqrt{A^2 + B^2}$

Si los movimientos están en oposición δ= π e

$$y = -\frac{B}{A}x \qquad [1.30]$$

ecuación de la recta RS. Decimos por tanto que cuando $\delta = 0$ ó $\delta = \pi$ la interferencia de 2 MAS perpendiculares de la misma frecuencia da lugar a una polarización rectilinea

b) Cuando $\delta = \pi/2$ se dice que los movimientos a lo largo de los ejes X e Y están en cuadratura e

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad [1.31]$$

ecuación de una elipse recorrida en el sentido de las agujas del reloj. Para $\delta = 3\pi/2$ la elipse es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj. Por tanto, cuando la diferencia de fase es $\delta = \pm\pi/2$ la interferencia de 2 MAS de igual frecuencia y direcciones perpendiculares da lugar a una polarización elíptica. Cuando A=B la elipse se transforma en un círculo y tenemos una polarización circular.

c) Para un valor arbitrario de la diferencia de fase δ la trayectoria es aún una elipse pero sus ejes están rotados respecto al eje de coordenadas tal y como se muestra en la figura 1.10 para ciertas diferencias de fase.

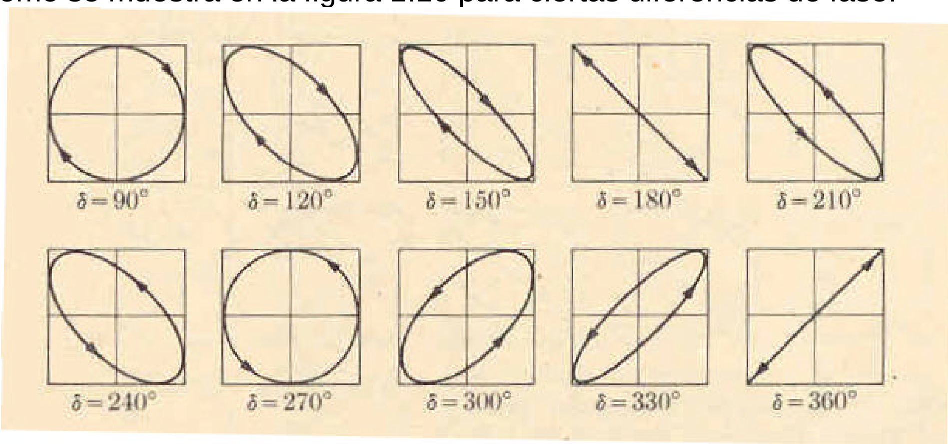

Figura 1.10. Composición de 2 MAS perpendiculares y f iguales para ciertas δ dadas

Otra situación interesante es la interferencia de 2 MAS perpendiculares de frecuencias diferentes

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(w_1 t) \\ y &= A_2 \cos(w_2 t + d) \end{aligned} \qquad [1.32]$$

La trayectoria depende de la relación ω_1/ω_2 y de la diferencia de fase δ denominándose estas curvas figuras de Lissajous. La figura 1.11 muestra estas trayectorias para diferentes relaciones ω_1/ω_2 y diferencias de fase δ.

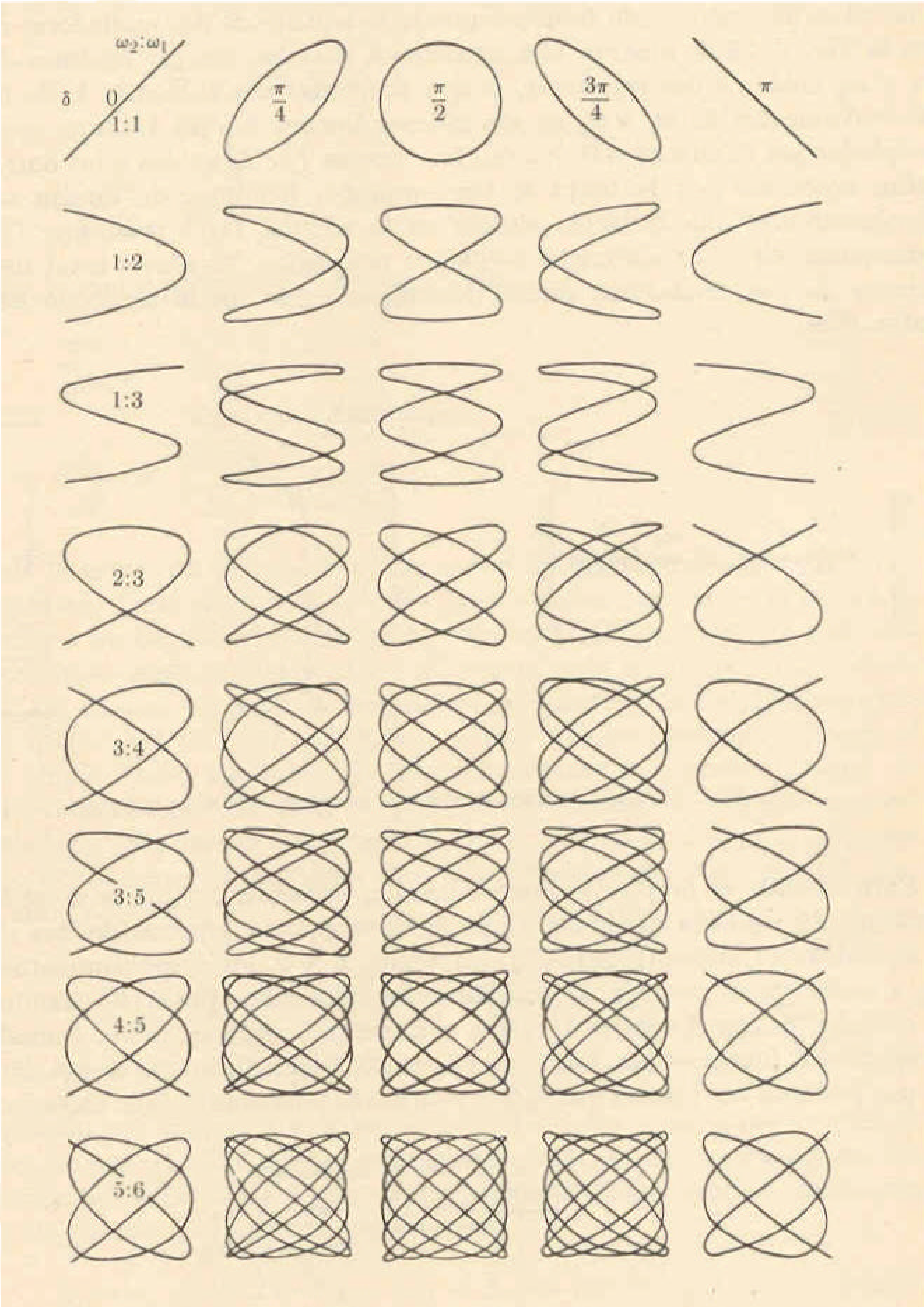

Figura 1.11. Figuras de Lissajous resultantes de la composición de 2 MAS perpendiculares de diferente f y δ

1.4 Sistemas físicos oscilantes

1.4.1 Sistema masa-muelle. Cuando un cuerpo cuelga de un muelle vertical como el que se muestra en la figura 1.12, existe sobre la masa m, además de la fuerza ejercida por el muelle F_m=-ky donde y se mide hacia abajo desde la posición sin deformar del muelle, la fuerza de la gravedad mg. Por tanto la 2º ley de newton se escribe

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg \qquad [1.33]$$

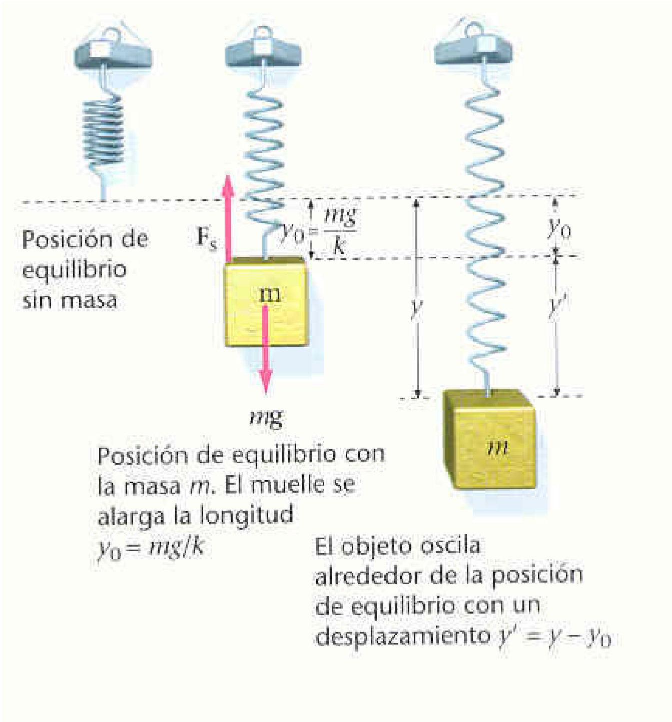

Figura 1.12. Cuerpo colgando de un muelle vertical

Realizando el cambio de variable $y' = y - y_0$ donde $y_0 = \frac{mg}{k}$ es la cantidad en que se ha alargado el muelle cuando el objeto está en equilibrio, obtenemos

$$m\frac{d^2(y'+y_0)}{dt^2} = -k(y'+y_0) + mg = -ky' - ky_0 + mg \qquad [1.34]$$

pero ky_0=mg con lo que queda la ecuación diferencial de un MAS

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -ky' \qquad [1.35]$$

con la solución ya conocida

$$y' = a\cos(wt + d) \qquad [1.36]$$

Así pues el efecto que produce la fuerza gravitatoria mg es simplemente el de desplazar la posición de equilibrio desde y=0 a y´=0 y el objeto oscila alrededor de esta posición de equilibrio con una frecuencia angular ω^2= k/m y energía potencial $U = \frac{1}{2}ky'^2$ tal y como se muestra en la figura 1.12.

1.4.2 Objetos flotantes. Si un objeto flotante se introduce ó se saca de un líquido a partir de su posición de equilibrio, figura 1.13, aparece una fuerza restauradora igual al aumento ó disminución del peso del líquido desplazado. Un ejemplo sencillo es el densímetro utilizado para medir la densidad de líquidos. Se trata de un cuerpo flotante con un área de sección recta que atraviesa la superficie del líquido. Sea m la masa del densímetro, A el área de su sección recta y ρ la densidad del líquido. Si el densímetro está a una distancia y por encima de su nivel de flotación, el volúmen de líquido desplazado es Ay y la ecuación diferencial de movimiento y su solución queda

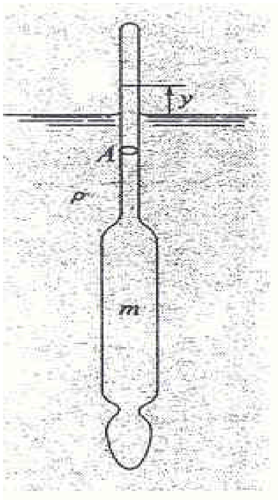

Figura 1.13. Objeto flotante

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -grAy$$

$$w = \sqrt{\frac{grA}{m}} \qquad [1.37]$$

$$T = 2p\sqrt{\frac{m}{grA}}$$

1.4.3 Péndulo simple. Un péndulo simple consta de una cuerda de longitud L y un objeto de masa m, figura 1.14. Cuando el objeto se deja en libertad desde un ángulo inicial ϕ_0 con la vertical oscila con un periodo T. Las fuerzas que actúan sobre el objeto son su peso mg y la tensión T de la cuerda. Cuando la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, el peso tiene las componentes mgcosϕ a lo largo de la cuerda y mgsenϕ tangencial al arco circular en el sentido de ϕ decreciente. Sea s la longitud del arco medido desde la parte inferior de la circunferencia. Por tanto s=Lϕ en donde ϕ se mide en radianes. La componente tangencial de la segunda ley de Newton da

$$-mgsenf = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\frac{g}{L}senf \qquad [1.38]$$

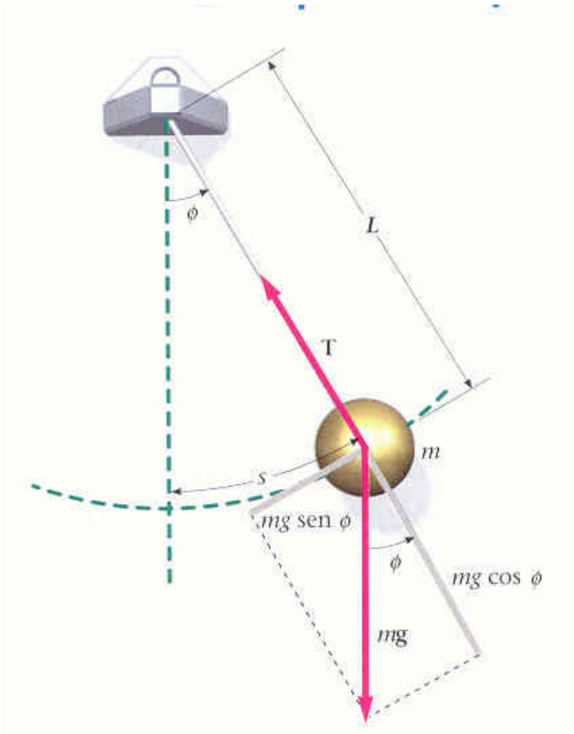

Figura 1.14. Péndulo simple

Obsérvese que la masa m no aparece en la ecuación [1.38], es decir el movimiento de un péndulo no depende de su masa. Para amplitudes de oscilación pequeñas sen$\phi \approx \phi$ y nos queda la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\frac{g}{L} f \qquad [1.39]$$

que tiene la misma forma que la ecuación diferencial de un MAS con frecuencia angular ω y periodo T

$$\begin{aligned} f &= f_0 \cos(wt + d) \\ w &= \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad [1.40] \\ T &= 2p\sqrt{\frac{L}{g}} \end{aligned}$$

De acuerdo con 1.40 cuanto mayor es la longitud del péndulo, mayor es el periodo, y la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud de la oscilación para amplitudes pequeñas.

La energía total del péndulo para pequeñas oscilaciones vendrá dada por la ecuación

$$E_T = \frac{1}{2} mL^2 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mgL f^2 = \frac{1}{2} mgL f_0^2 \qquad [1.41]$$

<u>1.4.4 Péndulo físico</u>. Un cuerpo rígido, que pueda girar libremente alrededor de un eje horizontal que no pase por su centro de masas, oscilará cuando se desplaze de su posición de equilibrio recibiendo este sistema el nombre de péndulo físico. Consideremos una figura plana de masa m con un eje de rotación situado a una distancia D del centro de masas y desplazado de su posición de equilibrio un ángulo ϕ, figura 1.15.

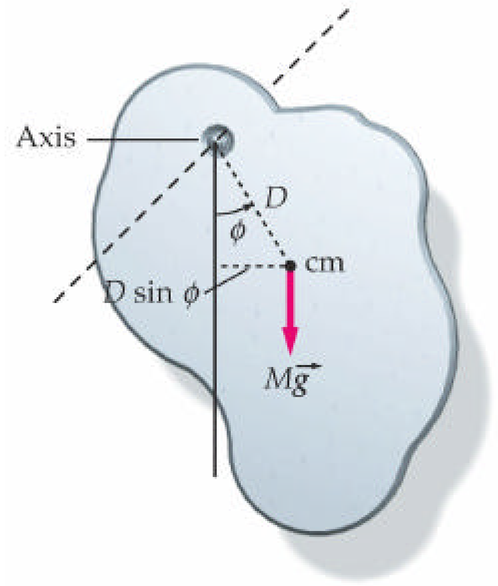

Figura 1.15. Péndulo físico

El momento de fuerza τ respecto al eje tiene como módulo mgDsenϕ y aplicando la 2º ley de Newton τ=Iα, siendo I el momento de inercia respecto al eje y α la aceleración angular obtenemos

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\frac{mgD}{I} senf \qquad [1.42]$$

De igual forma que en el péndulo simple, y para desplazamientos angulares pequeños, sen$\phi \approx \phi$, el movimiento que realiza el cuerpo es aproximadamente armónico simple con una ecuación de movimiento dada por

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\frac{mgD}{I} f = -w^2 f \qquad [1.43]$$

donde $w = \sqrt{mgD/I}$ es la frecuencia angular del movimiento armónico simple, y en consecuencia el periodo de oscilación es igual a

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{I}{mgD}} \qquad [1.44]$$

En este caso, y a diferencia del péndulo simple, el periodo de oscilación del péndulo físico si depende de la masa del cuerpo.

<u>1.4.5 Moléculas diatómicas</u>. La energía potencial de una molécula diatómica viene dada por el potencial de Lennard-Jones representado en la figura 1.16

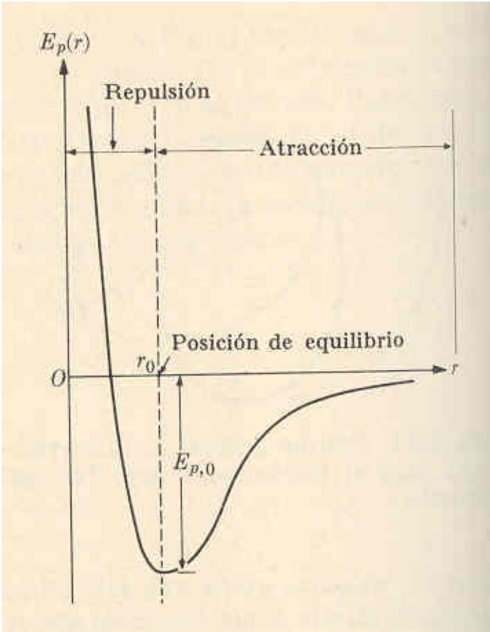

Figura 1.16. Potencial de Lennard-Jones en una molécula diatómica

$$U = -U_0\left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right] \qquad [1.45]$$

Los parámetros separación de equilibrio r_0 y energía potencial de equilibrio U_0 están determinados por la estructura de las moléculas individuales. Para $r>r_0$ la pendiente de $U(r)$ es positiva, la fuerza es atractiva, para $r<r_0$, la pendiente es negativa y la fuerza es fuertemente repulsiva, mientras que para $r=r_0$ la fuerza es nula (mínimo de la energía potencial). Algunos valores típicos de r_0 y U_0 son los mostrados en la tabla 1.1 para 3 moléculas diatómicas.

Tabla 1.1. Valores del potencial de Lennard-Jones para moléculas diatómicas

Gas	**U_0 (10^{-23} J)**	**r_0 (angstroms)**
Hidrógeno (H_2)	43	3.3
Nitrógeno (N_2)	131	4.2
Oxígeno (O_2)	162	3.9

La figura 1.16 muestra como esta energía potencial dista mucho de la forma parabólica asociada a la energía potencial de un MAS y para una determinada energía E, la partícula oscilará entre las posiciones x_1 y x_2 asimétricas respecto a r_0. Sin embargo, en la mayoría de los casos de movimiento unidimensional en que la energía potencial presenta uno ó más mínimos, como es el caso del potencial de Lennard-Jones, el movimiento de la partícula para pequeñas oscilaciones en torno al mínimo sigue la ecuación del MAS. Para demostrarlo supongamos que U(x) tiene un mínimo en x_0 y desarrollemos U(x) en serie de Taylor alrededor de este punto

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x0}(x - x_0)^2 + ... \qquad [1.46]$$

dado que la primera derivada en x_0 es nula al tratarse de un mínimo de la función y haciendo k igual a la segunda derivada en x_0 y $x' = x - x_0$ llegamos para pequeños valores de x´ a $U(x') = \frac{1}{2}kx'^2$ energía potencial asociada a un MAS. La consideración de las potencias superiores a 2 en la energía potencial da lugar al movimiento oscilatorio anarmónico que no consideraremos. Por tanto para pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio el movimento es el de un oscilador armónico. Para el potencial de Lennard-Jones, tenemos

$$\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r0} = 72\frac{U_0}{r_0^2} \qquad [1.47]$$

con lo que la frecuencia de oscilación de la molécula diatómica será igual a

$$w = \sqrt{\frac{72U_0}{mr_0^2}} \qquad [1.48]$$

1.5 Oscilador armónico amortiguado

Dejado libremente en movimiento, un muelle ó un péndulo deja finalmente de oscilar dado que la energía del mismo se disipa por fuerzas de rozamiento proporcionales a la velocidad, que suelen representarse por la expresión empírica

$$F_r = -b\frac{dx}{dt} \qquad [1.49]$$

donde b es la constante de amortiguamiento. Dado que F_r se opone al movimiento, signo opuesto a la velocidad del objeto, realiza un trabajo negativo y es la causa de que la energía disminuya. Introduciendo este término en la 2º ley de Newton obtenemos la ecuación diferencial de movimiento de un sistema amortiguado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad [1.50]$$

cuya solución da la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado

$$x = Ae^{-gt}\cos(w_1 t + J) \qquad [1.51]$$

con las constantes A y θ que dependen de las condiciones iniciales y

$$g = \frac{b}{2m} \quad \text{coeficiente de amortiguamiento}$$

$$w_1 = \sqrt{w_0^2 - (\frac{b}{2m})^2} \quad \text{donde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ frecuencia natural} \qquad [1.52]$$

La ecuación [1.51] corresponde a una oscilación de frecuencia ($\omega_1/2\pi$) con una amplitud $Ae^{-\gamma t}$ que decrece exponencialmente con el tiempo tal y como se muestra en la figura 1.17. Si la constante de amortiguamiento b crece gradualmente, la frecuencia angular ω_1 disminuye hasta hacerse cero en el valor crítico b_c

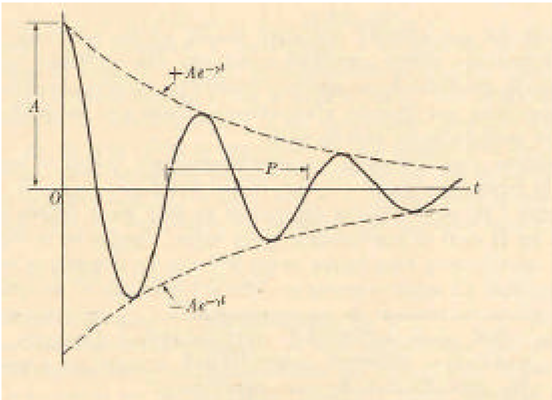

Figura 1.17. Oscilaciones amortiguadas con coeficiente de amortiguamiento γ

$$b_c = 2mw_0 \qquad [1.53]$$

diciéndose que el sistema está amortiguado críticamente y vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más corto, figura 1.18. Si $b>b_c$ el sistema no oscila y el sistema está sobreamortiguado.

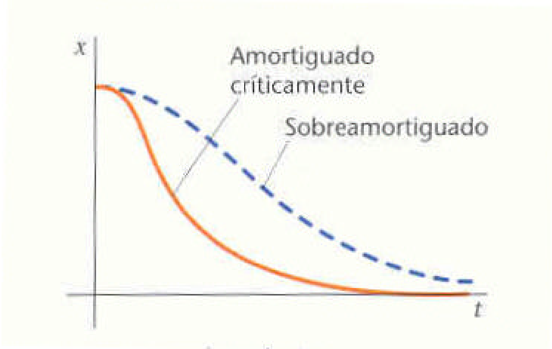

Figura 1.18. Sistemas amortiguados críticamente y sobreamortiguados

Dado que vimos que la energía del oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud llegamos a que la energía del oscilador amortiguado disminuye exponencialmente con el tiempo según la ecuación

$$E_T = E_{T0}e^{-2gt} \qquad [1.54]$$

donde E_{T0} es la energía inicial del oscilador.

Generalmente un oscilador amortiguado se describe por su factor de calidad Q definido como

$$Q = \frac{mw_0}{b} \qquad [1.55]$$

que introducido en la amplitud de oscilación dependiente del tiempo

$$A(t) = Ae^{-\frac{w_0 t}{2Q}} \qquad [1.56]$$

de tal modo que Q/π nos da el número de ciclos de oscilación durante los cuales la amplitud de oscilación disminuye un factor e. Ó dicho de otra forma, el factor de calidad Q es inversamente proporcional a la perdida relativa de energía por ciclo.

1.6 Oscilador armónico forzado

El oscilador armónico sometido a una fuerza externa recibe el nombre de oscilador armónico forzado. El caso más importante es aquel en el que la fuerza aplicada es de caracter sinusuoidal con frecuencia ω y amplitud F_0 con lo que la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos(wt) \qquad [1.57]$$

con solución

$$x = Ae^{-gt}\cos(w_1 t+q)+\frac{F_0/m}{\left[(w^2-w_0{}^2)^2+4g^2w^2\right]^{1/2}}sen(wt+b) \qquad [1.58]$$

$$b = arctg\frac{w_0^2-w^2}{2gw}$$

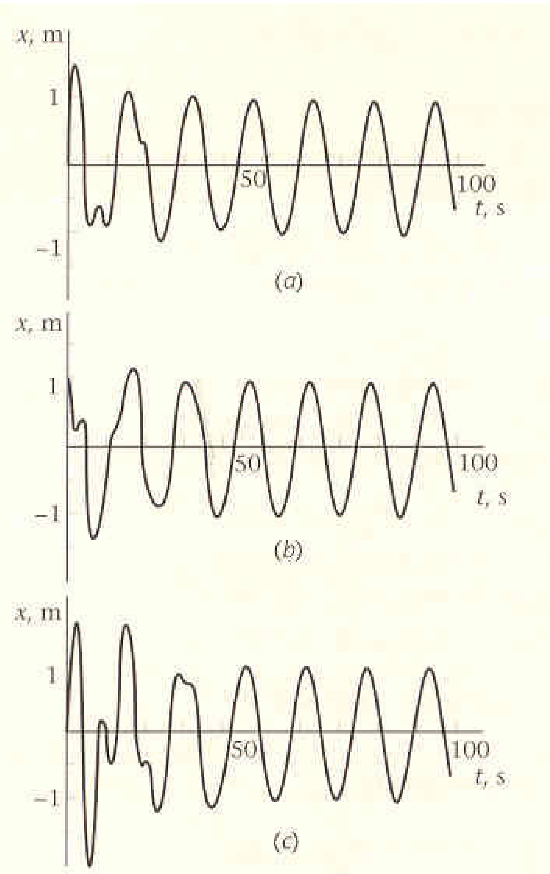

Figura 1.19. Oscilaciones forzadas para diferentes condiciones iniciales y frecuencia impulsora de 0,4 rad/s

El primer término de la solución se extingue exponencialmente con el tiempo, coincide con la solución del oscilador amortiguado, y se le denomina estado transitorio. Presenta 2 constantes, A y θ, que se determinan a partir de las condiciones iniciales. El segundo término, independiente de las condiciones iniciales, es el estado estacionario, que oscila con amplitud constante y con la frecuencia angular de la fuerza aplicada, pero con diferente fase. Cuando la frecuencia impulsora ω es mucho menor que la frecuencia natural ω_0, la diferencia de fase es practicamente cero. Cuando $\omega=\omega_0$ la diferencia de fase es π/2 y para $\omega>>\omega_0$ la diferencia de fase es prácticamente π. La figura 1.19 muestra tres soluciones según la ecuación [1.58] para condiciones iniciales diferentes y una frecuencia impulsora de 0,4 rad/s.

Si la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia natural del sistema, este oscilará con amplitud máxima. Este fenómeno se denomina resonancia y a la frecuencia a la que ocurre frecuencia de resonancia. En este punto la transferencia de energía de la fuerza aplicada al oscilador forzado es máxima tal y como demostraremos a continuación.

En el estado estacionario, la fuerza aplicada suministra una potencia media al oscilador al ritmo que se disipa en los rozamientos y viene dada por la ecuación

$$P_m = \langle vF(t) \rangle_m = \frac{F_0^2}{m} \frac{gw^2}{(w^2 - w_0^2)^2 + 4g^2 w^2} \qquad [1.59]$$

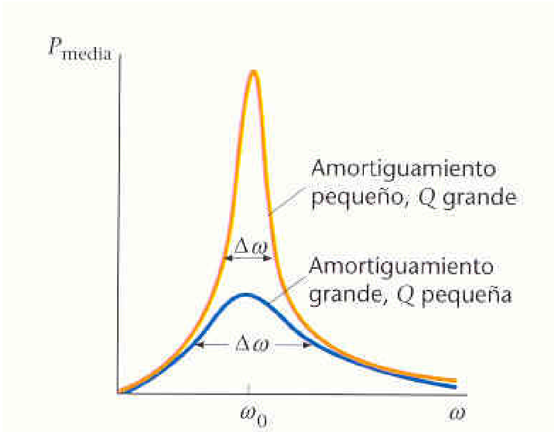

Figura 1.20. Potencia media suministrada por la fuerza al oscilador en la resonancia en función del factor de calidad Q

que alcanza un máximo para la frecuencia de resonancia tal y como se muestra en la figura 1.20 donde se muestran las curvas de resonancia para diferentes amortiguamientos. Profundizemos en este análisis introduciendo el factor de calidad, $Q = {}^{mw_0}\!/_{b}$ previamente definido, en la amplitud y constante de fase del estado estacionario

$$A(w) = \frac{F_0}{k} \frac{{}^{w_0}\!/_{w}}{\left[\left(\frac{w_0}{w} - \frac{w}{w_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \qquad [1.60]$$

$$b = arctg\left(Q\left(\frac{w_0}{w} - \frac{w}{w_0} \right) \right)$$

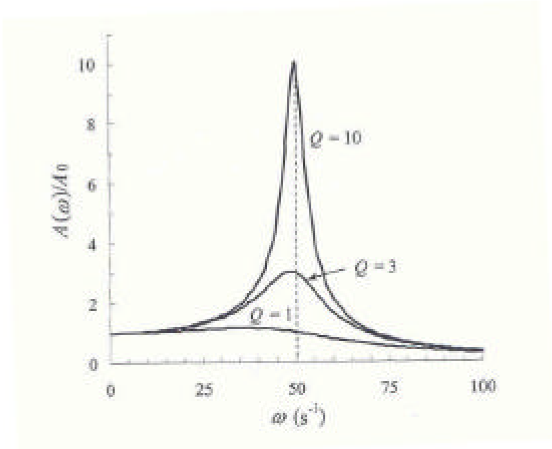

Figura 1.21. Amplitud de oscilación en la resonancia para diferentes factores de calidad Q

En la figura 1.21 se muestra la amplitud de oscilación calculada a partir de [1.60] para diferentes factores de calidad alcanzándose un máximo en la resonancia que depende de Q según la ecuación

$$A(w_0) = \frac{F_0 Q}{k} \qquad [1.61]$$

Igualmente se demuestra como la nitidez del ajuste de un sistema resonante, definido como el cociente entre la frecuencia natural y la anchura de pico $\Delta\omega$ a mitad del máximo de potencia entregada, figura 1.20, aumenta claramente con el factor de calidad del mismo según la ecuación.

$$\frac{w_0}{\Delta w} = Q \qquad [1.62]$$

Existen muchos ejemplos prácticos del fenómeno de resonancia. Al impulsarnos en un columpio nos impulsamos moviendo el cuerpo con la misma frecuencia natural del columpio. Puede romperse un vaso con bajo amortiguamiento mediante una onda sonora intensa con frecuencia cercana a la natural de vibración del mismo. Uno de los ejemplos más cercanos es la sintonización de una radio. Todas las estaciones emisoras producen oscilaciones forzadas en el circuito receptor, pero solo cuando el sintonizador hace coincidir la frecuencia de oscilación natural del circuito eléctrico receptor con la de la estación emisora, la absorción de potencia es máxima y escuchamos la emisión. Además la nitidez del ajuste estará directamente relacionada con los factores de calidad de los componentes utilizados en el circuito.

1.7 Análisis de Fourier del movimiento periódico

Al comienzo de esta capítulo explicamos como el MAS es un caso específico del movimiento oscilatorio. Pero un movimiento oscilatorio general de periodo T está descrito por

$$x = f(t) \quad \text{con} \quad f(t) = f(t+T) \qquad [1.63]$$

tal y como se muestra en la figura 1.22 donde la gráfica de f(t) se repita a intervalos iguales de T. El teorema de Fourier establece que una función periódica de periodo $T = 2p/w$ puede expresarse como la suma

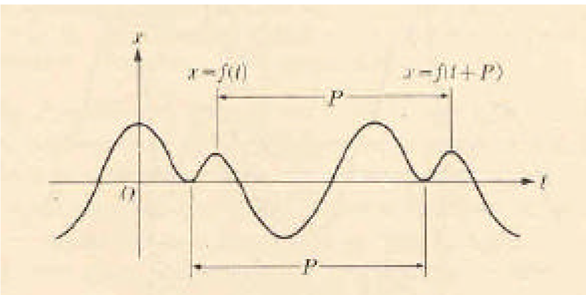

Figura 1.22. Movimiento periódico arbitrario

$$\begin{aligned} x = f(t) &= a_0 + a_1 \cos wt + a_2 \cos 2wt + ...+ a_n \cos nwt + ... \\ &+ b_1 sen wt + b_2 sen 2wt + ...+ b_n sen nwt + ... \end{aligned} \qquad [1.64]$$

con

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nwtdt \qquad [1.65]$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sennwtdt$$

Esta serie se conoce como serie de Fourier donde ω es la frecuencia fundamental y las frecuencias 2ω, 3ω, , nω,... son los armónicos ó sobretonos. Aplicando el teorema de Fourier, cualquier clase de movimiento periódico puede considerarse como la superposición de MAS tal y como se muestra en la figura 1.23 para un caso en particular. Este teorema explica por ejemplo la cualidad diferente del sonido producido por diferentes instrumentos musicales a pesar de que los tonos tienen la misma frecuencia fundamental. La diferencia estriba en la presencia de los armónicos ó sobretonos con diferentes amplitudes relativas. En otras palabras, el análisis de Fourier del sonido es diferente para cada instrumento.

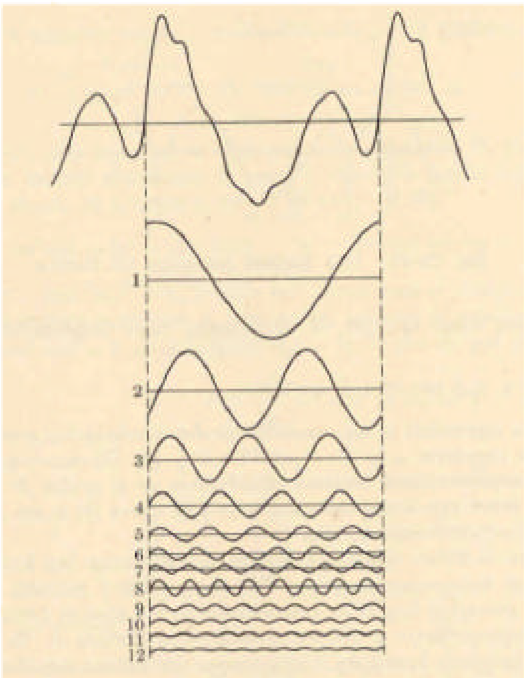

Figura 1.23. Serie de Fourier de un movimiento periódico arbitrario

Otro ejemplo de aplicación del análisis de Fourier en el movimiento oscilatorio es la resolución del oscilador armónico con fuerza aplicada periódica arbitraria F(t+T)= F(t). Por el teorema de Fourier F(t) puede ser expresada como una serie de términos seno y coseno $F_n(t)$ de tal forma que la ecuación diferencial del movimiento quedaría para el término n-esimo

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} + b\frac{dx_n}{dt} + kx_n = F_n(t) \qquad [1.66]$$

ecuación cuya solución hemos hallado en el apartado anterior. Aplicando ahora el principio de superposición, la ecuación de movimiento del oscilador sometido a esta fuerza periódica arbitraria sería

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \qquad [1.67]$$

Problemas

1. Un barco se balancea arriba y abajo y su desplazamiento vertical viene dado por la ecuación $y = 1{,}2\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{p}{6}\right)$. Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento. ¿Dónde se encuentra el barco en t=1s?. Determinar la velocidad y aceleración en cualquier tiempo t y calcular la posición, velocidad y aceleración inicial.
2. Un objeto oscila con frecuencia angular ω=8 rad/s. En t=0, el objeto se encuentra en x_0=4 cm con una velocidad inicial v_0=-25 cm/s. Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento y escribir x en función de t.
3. Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle de constante de fuerza k=196 N/m. El objeto se mantiene a una distancia de 5 cm de la posición de equilibrio y se deja en libertad en t=0. Determinar la frecuencia, el periodo y la ecuación del movimiento de este MAS. ¿Cuál es la velocidad y aceleración máximas del objeto y en que momento se alcanzan?
4. Un objeto de 3 kg conectado a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s. ¿Cuál es la energía total del objeto? ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto y en que posición se alcanza? ¿En que posición la velocidad es igual a al mitad de su valor máximo, y en cúal la energía potencial es igual a la cinética?
5. Encontrar la ecuación resultante de la superposición de 2 MAS paralelos cuyas ecuaciones son $x_1=2\cos(\omega t+\pi/3)$ y $x_2=3\cos(\omega t+\pi/3)$. Representar los vectores rotantes y el movimiento resultante.
6. Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de 2 MAS perpendiculares cuyas ecuaciones son $x=4\mathrm{sen}\,\omega t$ e $y=3\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$ cuando $\alpha=0$, $\pi/2$ y π. Representar la trayectoria y dirección de movimiento para cada caso
7. Una masa de 3 kg estira un muelle 16 cm al ser colgada verticalmente. Calcular la frecuencia de oscilación
8. Un objeto de masa 2 kg está sujeto sobre un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud del muelle sin deformar es de 8 cm y la posición de equilibrio del objeto sobre el muelle está a 5 cm desde el nivel del suelo. Cuando el objeto está en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de tal manera que la velocidad inicial es de 0,3 m/s.¿A qué máxima altura, respecto al nivel del suelo, se elevará el objeto?¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar la máxima altura por primera vez? ¿Volverá el muelle a estar sin compresión? ¿Qué velocidad inicial mínima debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado?
9. Un péndulo simple de longitud l=1 m se encuentra en un furgón de ferrocarril que se mueve horizontalmente con una aceleración a. El periodo de oscilación del péndulo que se mide en esta situación es de T=1,96 s. Determinar la aceleración a del ferrocarril.

10. Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y situado a una distancia x del centro de masas. (a) Determinar el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares; (b) determinar el valor de x para que el periodo de oscilación sea el mínimo. (Nota: el momento de inercia respecto a este eje viene dado por $I = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$)
11. Un pájaro de 30 g de masa se apoya en el extremo de una rama de 20 cm de longitud y 3 mm de diámetro. El módulo de Young de la madera es de 8×10^9 N/m^2. Calcular la frecuencia de oscilación del pájaro en la rama. (Tener en cuenta que la relación entre el momento de la fuerza M y el radio de curvatura R es igual a M=EI/R donde E es el módulo de Young del material e $I=\pi r^4/4$ es el momento de inercia del cilindro)
12. Un bloque descansa sobre un muelle y oscila verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Una pequeña bola se sitúa en la parte superior del bloque oscilante justo cuando éste alcanza su punto más bajo. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio del bloque la bolita pierde el contacto con el bloque? ¿Qué velocidad posee la bolita al escapar del bloque?
13. Cuando se pulsa la nota do-central de un piano (frecuencia 262 Hz), la mitad de su energía se pierde en 4 s. ¿Cuál es el coeficiente de amortiguamiento y factor de calidad de la cuerda del piano? ¿Cuál es la perdida de energía relativa por ciclo?
14. Un objeto de 2 kg oscila sobre un muelle de constante k=400 N/m con una constante de amortiguamiento b=2 kg/s. Está impulsado por una fuerza sinusoidal de valor máximo 10 N y frecuencia angular ω=10 rad/s. Calcular la amplitud de las oscilaciones y la frecuencia y amplitud de resonancia.
15. Sea un péndulo consistente en una esfera de Al de 0,005 m de radio suspendida de una cuerda de 1 m de longitud. Determinar la amplitud y periodo de oscilación de este péndulo. Averiguar como afecta la viscosidad del aire a estos dos parámetros. (Considerar que la fuerza debido a la viscosidad η que actúa sobre una esfera de radio R y velocidad v es igual a $F=-6\pi\eta Rv$ y para el aire a 20 ºC $\eta=1{,}78 \times 10^{-5}$ kg/ms) ¿Cúal es el tiempo necesario para que la amplitud se reduzca un 10% de la inicial?
16. Un niño se columpia con un período de 3 s. El niño y el columpio poseen una masa de 30 kg. El padre del niño impulsa pacientemente el columpio una vez cada ciclo de modo que mantiene una amplitud angular estacionaria de 30°. Si el valor de *Q* es igual a 20, calcule la potencia transmitida por el padre. (*Nota*: tenga en cuenta la relación entre el período y la longitud del columpio)
17. Un objeto de masa 1,5 kg situado sobre un muelle de constante de fuerza 600 N/m pierde el 3% de su energía en cada ciclo. El sistema viene impulsado por una fuerza sinusoidal con un valor máximo de F_0=0,5 N. ¿Cuál es el valor de Q para este sistema y el valor de la frecuencia angular de resonancia y amplitud de resonancia? ¿Cuál es la amplitud de oscilación si la frecuencia impulsora es 19 rad/s?

18. Demostrar la ecuación $P_m = \langle vF(t) \rangle_m = \frac{F_0^2}{m} \frac{gw^2}{(w^2 - w_0^2)^2 + 4g^2 w^2}$

(Nota: conocida la tangente de un ángulo es fácil conocer su seno ó coseno)

19. Demostrar que el cociente entre la anchura $\Delta\omega$ a la mitad del máximo de la potencia media entregada en la resonancia, para una resonancia aguda, y la frecuencia ω_0 del mismo es igual al valor inverso del factor Q