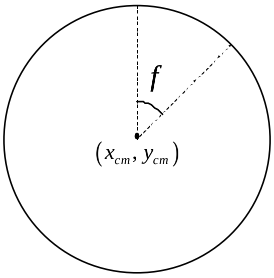
Tema 3. Dinámica del sólido rígido

Primera parte: Movimiento plano

1. Grados de libertad

- Para caracterizar el movimiento de un sólido rígido plano nos bastan tres coordenadas o grados de libertad. Dos de ellas nos dan la posición del centro de masas. La tercera, un ángulo, nos da la orientación del sólido respecto de su centro de masas.



2. Campo de velocidades

- Sean O y P dos puntos del sólido rígido. La relación entre sus velocidades $\vec{V}_O$ y $\vec{V}_P$ es

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{w} \times \overrightarrow{OP}}$$

siendo

$$\boxed{\vec{w} = \frac{df}{dt}\vec{u}_z}$$

el vector velocidad angular, que define la velocidad de giro respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano del sólido.

- Tomando el punto O como origen de un sistema de coordenadas móvil ligado al sólido, y P como cualquier punto arbitrario del sólido, obtenemos la primera interpretación del movimiento de un sólido plano:

" **El sólido gira con velocidad angular w respecto al punto O, que a su vez se desplaza con velocidad** $\vec{V}_O$ "

3. Centro instantáneo de rotación

- En el movimiento de un sólido plano, siempre existe un punto CIR exterior o interior al sólido que se encuentra, en el instante dado, en reposo. Su posición no está fijada, sino que va cambiando con el tiempo. Es el **centro instantáneo de rotación**. Respecto a él, un punto arbitrario P del sólido tiene una velocidad

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_{CIR} + \vec{w} \times \overrightarrow{CIR,P} = \vec{w} \times \overrightarrow{CIR,P}}$$

Así, tenemos la segunda interpretación del movimiento:

" **El sólido plano gira con velocidad angular w respecto a su centro instantáneo de rotación CIR** "

- En cada caso práctico, para determinar la posición del centro instantáneo de rotación, basta considerar que según la fórmula anterior, la velocidad de cada punto del sólido es perpendicular a su vector de posición respecto al CIR. Es decir, si dibujamos las líneas perpendiculares a las velocidades conocidas de dos puntos del sólido, el CIR se encuentra situado en su punto de corte.

4. Momento lineal

- Ya que el sólido es un conjunto de partículas individuales, el momento lineal total es igual a

$$\boxed{\vec{p} = M\vec{V}_{cm}}$$

siendo M la masa del sólido, y $\vec{V}_{cm}$ la velocidad de su centro de masa.

5. Momento angular y momento de inercia

- Determinamos el momento angular de giro del sólido respecto a su centro de masa O, siendo el plano xy el plano del sólido, y el eje z la dirección del vector $\vec{w}$. Sea s la densidad superficial de masa. Entonces

$$\boxed{\vec{L}_O = \int \vec{r} \times (s\ dS)\vec{V}}$$

donde la velocidad de cada punto del sólido se relaciona con la velocidad del centro de masa

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_O + \vec{w} \times \vec{r}}$$

- Por definición del centro de masa, y ya que nuestro origen se sitúa en el propio centro de masa, se satisface

$$\boxed{\int \vec{r}\ s\ dS = M\vec{r}_O = 0}$$

con lo cual, el momento angular de giro resulta ser

$$\vec{L}_O = \int \vec{r}\times(\vec{w}\times\vec{r})\,s\,dS = \int\left[r^2\vec{w} - \vec{r}\,(\vec{w}\cdot\vec{r})\right]s\,dS$$

- Por ser un sólido plano $\vec{w}\cdot\vec{r}=0$ ya que $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y además $r^2 = x^2 + y^2$, con lo cual

$$\boxed{\vec{L}_O = \int r^2 s\,dS\,\vec{w} = \int (x^2+y^2)s\,dS\,\vec{w} = I_O\,\vec{w}}$$

siendo $\boxed{I_O = \int (x^2+y^2)s\,dS}$ el momento de inercia del sólido plano respecto al eje que pasa por su centro de masa.

6. Teorema de Steiner

- Si calculamos el momento angular respecto al centro instantáneo de rotación *CIR*, llegamos a la fórmula análoga

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{L}_{CIR} = I_{CIR}\,\vec{w}\\ &I_{CIR} = \int (x'^2+y'^2)s\,dS'\end{aligned}}$$

siendo (x',y') las nuevas coordenadas de cada punto del sólido respecto a un sistema centrado en *CIR*. Si $\vec{d}$ es la distancia entre el centro de masa O y el centro instantáneo de rotación *CIR*, ya que

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}$$

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{d}$$

y $\int \vec{r}\,s\,dS = 0$, se satisface

$$I_{CIR} = \int r'^2 s\,dS' = \int (r^2 + d^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{d})s\,dS = \int r^2 s\,dS + d^2\int s\,dS$$

relación que constituye el teorema de Steiner

$$\boxed{I_{CIR} = I_O + Md^2}$$

El momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro instantáneo de rotación es igual al momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa, más el producto de la masa total por el cuadrado de la distancia entre el centro de masa y el centro instantáneo de rotación.

7. Energía cinética

- Si tomamos como origen el centro de masa O,

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int V^2 s\,dS = \frac{1}{2}\int (\vec{V}_O + \vec{w}\times\vec{r})^2 s\,dS = \frac{1}{2}MV_O^2 + \frac{1}{2}I_O w^2}$$

suma de la energía cinética de traslación del centro de masa, y la energía cinética de rotación respecto al centro de masa.

- Si tomamos como origen el centro instantáneo de rotación CIR,

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int V^2 s\, dS = \frac{1}{2}\int (\vec{w} \times \vec{r}')^2\, s\, dS = \frac{1}{2} I_{CIR} w^2}$$

Toda la energía cinética proviene del movimiento de rotación respecto al CIR.

En cada caso debe decidirse que expresión es más adecuada, el valor de T es el mismo.

8. Ecuaciones del movimiento

- Tomando un sistema de coordenadas centrado en O, el movimiento de traslación se rige por el sistema de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} M\frac{d^2 x_{cm}}{dt^2} &= F_x \\ M\frac{d^2 y_{cm}}{dt^2} &= F_y \end{aligned}}$$

siendo $\left(x_{cm}, y_{cm}\right)$ la posición del centro de masa medida en unos ejes fijos en el espacio, y el movimiento de rotación respecto al centro de masa por la ecuación

$$\boxed{M_O = \frac{dL_O}{dt} = I_O \frac{dw}{dt} = I_O a}$$

siendo M_O el momento de las fuerzas aplicadas y a la aceleración angular producida.

- Para un sistema de coordenadas centrado en el CIR sólo necesitamos resolver la ecuación ligada a la rotación del sólido

$$\boxed{M_{CIR} = I_{CIR} a}$$

9. Condición de deslizamiento

- Al estudiar el movimiento de sólidos planos en contacto con superficies estáticas debemos suponer, para simplificar lo más posible el cálculo, que en cada instante sólo existe un punto de contacto entre el sólido y la superficie. Dicho contacto produce fricción y así, debemos incluir en nuestro modelo una fuerza de rozamiento que dé cuenta de este hecho. Como hemos visto en un tema anterior, la magnitud de la fuerza de rozamiento depende principalmente de la velocidad del punto del sólido que está en contacto con la superficie. En general, podemos escribir la velocidad del punto de contacto en la forma

$$\boxed{V_P = V_{cm} - wR}$$

siendo R su distancia al centro de masa. Analizamos dos tipos de comportamiento:

a) **Rodamiento sin deslizamiento**

En este caso, el sólido rueda sin deslizar cuando la velocidad del punto de contacto sea nula. Al ser esta velocidad nula, la fuerza de rozamiento no tiene una magnitud definida, sino que su valor será el suficiente como para mantener este régimen de movimiento. El punto de contacto tiene la propiedad adicional de ser el centro instantáneo de rotación del sólido. Podemos escribir entonces que un sólido rueda sin deslizar cuando

$$\boxed{\begin{array}{l} V_{cm} = wR \\ F_r = ? \end{array}}$$

b) **Rodamiento con deslizamiento**

En este caso, el punto de contacto tiene una velocidad no nula, lo que produce que el sólido deslice sobre la superficie. Es decir, $\boxed{V_{cm} \neq wR}$. Al ser esta velocidad diferente de cero, la fuerza de rozamiento tiene la magnitud definida $\boxed{F_r = -mN}$, siendo N la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el sólido.

10. Colisión entre un sólido rígido y una masa puntual

- En general, la colisión se describe de la forma siguiente. Una masa puntual es lanzada hacia un sólido rígido en reposo, impactando con él, de forma que se le comunica al sólido tanto momento lineal como momento angular. El momento lineal absorbido produce un movimiento de traslación del centro de masa, y el momento angular absorbido produce un movimiento de rotación respecto del centro de masa. Así pues, en el estudio de este tipo de colisiones, nuestro objetivo es doble: determinar la velocidad de traslación (velocidad del centro de masa) y la velocidad de rotación (velocidad angular). Para ello, debemos servirnos de las dos leyes de conservación imperantes en toda colisión: la ley de conservación del momento lineal

$$\boxed{\vec{p}_i = M\vec{V}_{cm}}$$

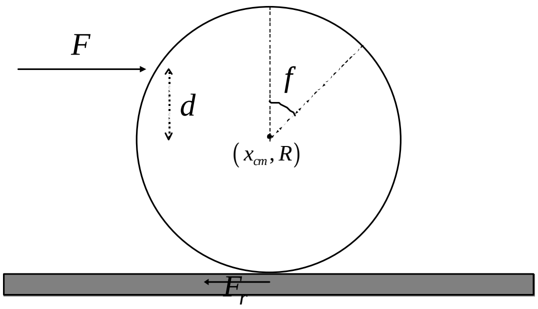
y la ley de conservación del momento angular

$$\boxed{\vec{L}_i = I_{cm}\vec{w}}$$

La dificultad añadida en este tipo de problemas es el cálculo de la posición del centro de masa, y del momento de inercia respecto al centro de masa.

Problemas Resueltos

3.1 A un cilindro de radio R y masa M, se le aplica una fuerza horizontal F en un punto situado a una distancia d de su centro de masa, de forma que rueda sin deslizar. Calcular la aceleración del centro de masa y la fuerza de rozamiento necesaria para que el cilindro efectivamente ruede sin deslizar.



- Las ecuaciones del movimiento son

$$F - F_r = Ma_{cm}$$

para el movimiento de traslación del centro de masa, y

$$Fd + F_r R = I_{cm}a$$

para el movimiento de rotación respecto al centro de masa. De la condición de rodamiento sin deslizamiento $V_{cm} = wR$, obtenemos, derivando respecto al tiempo, la relación entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular

$$a_{cm} = a\,R$$

Además, el momento de inercia del cilindro respecto de su eje tiene el valor

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$$

- Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones, obtenemos la aceleración del centro de masa

$$a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{d+R}{R}\frac{F}{M}$$

y la fuerza de rozamiento necesaria

$$F_r = \frac{R-2d}{3R}F$$

- Comprobamos que cuando $2d = R$ no se produce fuerza de rozamiento, y la aceleración del centro de masa corresponde a un movimiento de traslación sin rotación, bajo la acción únicamente de la fuerza aplicada F. Esta solución no es satisfactoria puesto que dicho movimiento de traslación debería ser frenado por la fuerza de rozamiento $F_r = -mN$, que aquí no ha sido incluida.

3.2 Una bola de billar, de masa M y radio R, se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal, con la que presenta un coeficiente de rozamiento m. Se le golpea con un taco en dirección horizontal, a una altura R, comunicándole una velocidad inicial V_0. Calcular la distancia recorrida por la bola en régimen de deslizamiento, antes de empezar a rodar sin deslizar.

- En el instante inicial, el golpe producido por el taco de billar está dirigido hacia el centro de la bola, por lo que sólo le comunica un movimiento de traslación, pero no de rotación. Entonces, la velocidad del punto de contacto tiene el valor

$$V_P = V_{cm} - wR = V_0 - 0R = V_0 \neq 0$$

con lo que inicialmente la bola desliza sobre la mesa horizontal.

- La única fuerza que actúa sobre la bola de billar es la producida por el rozamiento, y ya que el régimen es de deslizamiento, su valor es $F_r = -mN = -mMg$. Se genera así una deceleración constante del centro de masa

$$a_{cm} = \frac{F_r}{M} = -mg$$

Integrando en el tiempo, teniendo en cuenta su valor inicial, la velocidad del centro de masa en el instante t es

$$V_{cm} = V_0 - mgt$$

y así queda resuelto totalmente el movimiento de traslación.

- En cuanto al movimiento de rotación, la fuerza de rozamiento genera un momento de fuerzas positivo $M = F_r R = mMgR$, que da lugar a un movimiento de giro con la aceleración angular constante

$$a = \frac{M}{I_{cm}} = \frac{mMgR}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{5}{2}\frac{mg}{R}$$

Integrando en el tiempo, teniendo en cuenta su valor inicial, obtenemos la velocidad angular de giro en el instante t

$$w = \frac{5}{2}\frac{mg}{R}t$$

- Vemos que, tras el golpe inicial, el movimiento de traslación se va frenando y el movimiento de rotación se va acelerando. Todo ello debido a la presencia de una fuerza de rozamiento constante. La bola de billar cambia de régimen, y comienza a rodar sin deslizar en el instante en el que $V_{cm} = wR$. A partir de entonces, la fuerza de rozamiento tendrá el valor necesario para que se mantenga el rodamiento sin deslizamiento. Calculamos el tiempo en el que se produce el cambio. Se debe satisfacer

$$V_0 - mgt = \frac{5}{2}\frac{mg}{R}Rt$$

con lo cual

$$t = \frac{2}{7}\frac{V_0}{mg}$$

Calculamos ahora la distancia recorrida por la bola de billar en ese tiempo. Integrando en el tiempo la velocidad del centro de masa obtenemos su posición

$$x_{cm} = x_0 + V_0 t - \frac{1}{2}mgt^2$$

La distancia recorrida desde que se produce el golpe hasta que la bola cambia de régimen es igual a

$$d = x_{cm} - x_0 = V_0 \frac{2}{7}\frac{V_0}{mg} - \frac{2}{49}\frac{V_0^2}{mg} = \frac{12}{49}\frac{V_0^2}{mg}$$

3.3 A una bola de billar, de masa M y radio R, se le comunica una velocidad angular inicial w_0, sin velocidad lineal inicial. Calcular la distancia que recorre hasta empezar a rodar sin deslizar.

- Inicialmente la bola de billar desliza sobre el suelo horizontal, ya que la velocidad del punto de contacto es distinta de cero

$$V_P = V_{cm} - wR = 0 - w_0 R = -w_0 R \neq 0$$

La única fuerza que actúa es la fuerza de rozamiento $F_r = mN = mMg$, con sentido positivo, de signo contrario a la velocidad negativa del punto de contacto. La aceleración del centro de masa es positiva

$$a_{cm} = \frac{F_r}{M} = mg$$

mientras que el momento de fuerzas generado por la fuerza de rozamiento $M = -F_r R = -mMgR$ es negativo, y produce una desaceleración constante del movimiento de rotación

$$a = \frac{M}{I_{cm}} = -\frac{mMgR}{\frac{2}{5}MR^2} = -\frac{5}{2}\frac{mg}{R}$$

- Integrando en el tiempo las aceleraciones correspondientes, teniendo en cuenta sus valores iniciales, obtenemos la velocidad lineal y angular de la bola de billar en el instante t

$$V_{cm} = mgt$$

$$w = w_0 - \frac{5}{2}\frac{mg}{R}t$$

El movimiento cambia de régimen cuando $V_{cm} = wR$, en el instante dado por

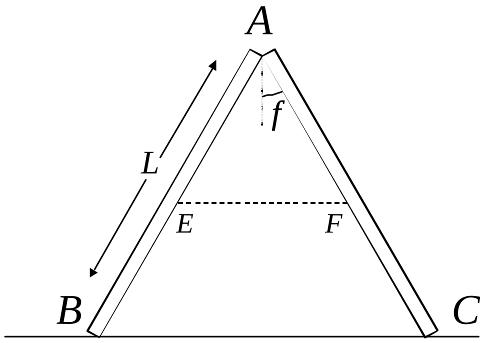
$$mgt = w_0 R - \frac{5}{2} mgt$$

$$t = \frac{2}{7}\frac{w_0 R}{mg}$$

- La distancia total recorrida en ese tiempo es

$$x_{cm} - x_0 = \frac{1}{2} mgt^2 = \frac{2}{49}\frac{w_0^2 R^2}{mg}$$

3.4 Una escalera doble, formada por dos partes iguales de longitud L y masa M cada una, se mantiene en reposo formado un ángulo $f = 30^o$ con la vertical, gracias a una cuerda EF situada entre sus puntos medios. Si en el instante inicial se corta la cuerda, calcular la velocidad con que el extremo A llega al suelo. Resolver el problema sin hacer uso del centro instantáneo de rotación, y haciendo uso de él.



- En el momento que se corta la cuerda EF, el punto A se mueve verticalmente hacia abajo, mientras que B y C lo hacen horizontalmente hacia afuera. El sistema queda determinado por una sola coordenada f. La velocidad del punto A viene dada por

$$V_A = 2L\dot{f}\cos(90 - f) = 2L\dot{f}\sin f$$

Para hallar su valor al llegar al suelo, donde $f = 90^o$, utilizamos la conservación de la energía.

- Para el tramo AC de escalera, la velocidad del centro de masa es, en módulo,

$$V_{AC} = \frac{L}{2}\dot{f}$$

Su momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa es

$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$$

La energía cinética de AC es suma de la energía cinética de traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación respecto al centro de masa. Con esto

$$\left(E_c\right)_{AC} = \frac{1}{2}MV_{AC}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{f}^2 = \frac{1}{8}ML^2\dot{f}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\dot{f}^2 = \frac{1}{6}ML^2\dot{f}^2$$

De manera análoga, dada la simetría de la escalera, la energía cinética del otro tramo de escalera es

$$\left(E_c\right)_{AB} = \frac{1}{6}ML^2\dot{f}^2$$

- Evaluando la energía potencial de cada tramo de escalera en los respectivos centros de masa, vemos que

$$\left(E_p\right)_{AC} = Mg\left(y_{cm}\right)_{AC} = Mg\frac{L}{2}\cos f$$

$$\left(E_p\right)_{AB} = Mg\left(y_{cm}\right)_{AB} = Mg\frac{L}{2}\cos f$$

$$E_p = MgL\cos f$$

- Con esto, la energía total de la escalera durante su movimiento de caída satisface

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{3}ML^2\dot{f}^2 + MgL\cos f$$

Inicialmente cada tramo de la escalera parte del reposo formando un ángulo de 30º con la vertical. Por tanto, el valor de la energía es

$$E = \frac{1}{3}ML^2 0^2 + MgL\frac{\sqrt{3}}{2} = MgL\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En el instante final, al llegar al suelo $f = 90^o$, de la conservación de la energía obtenemos el valor de la velocidad angular final

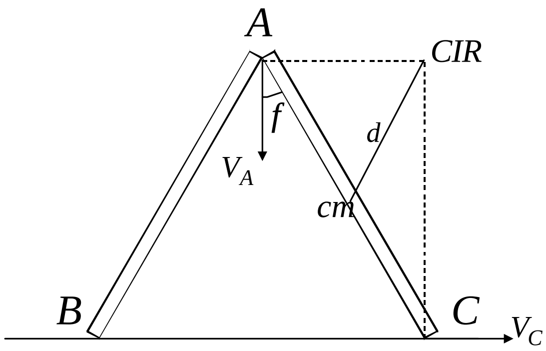
$$MgL\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}ML^2\dot{f}^2 + MgL\cos 90$$

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{g}{L}}$$

y de aquí la velocidad del punto A al llegar al suelo

$$V_A = 2L\dot{f}\sin 90 = \sqrt{6\sqrt{3}gL}$$

- Ahora referimos el movimiento al centro instantáneo de rotación. Para determinar la posición del CIR de cada tramo de escalera, escogemos dos puntos del sólido cuya dirección de velocidad sea conocida. En este caso es fácil ver que la velocidad del punto A siempre está dirigida verticalmente hacia abajo, y la velocidad del punto C siempre está dirigida horizontalmente hacia fuera. Dibujando dos líneas perpendiculares encontramos el CIR en su confluencia.



- La energía cinética es la energía cinética de rotación respecto al *CIR*

$$\left(E_c\right)_{AC}=\left(E_c\right)_{AB}=\frac{1}{2}I_{CIR}\dot{f}^2$$

siendo

$$I_{CIR}=I_{cm}+Md^2$$

y d la distancia entre el centro instantáneo de rotación y el centro de masa, que, según la figura, tiene el valor

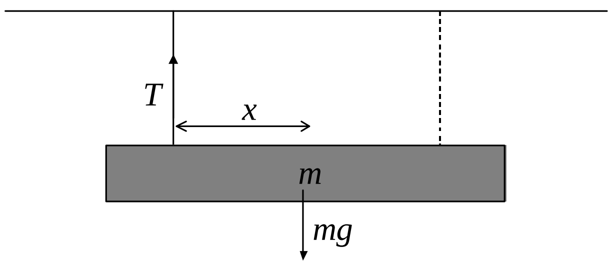
$$d=\frac{L}{2}$$

Con esto, calculamos el valor de la energía cinética total de la escalera en su caída

$$E_c=2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2+\frac{1}{4}ML^2\right)\dot{f}^2=\frac{1}{3}ML^2\dot{f}^2$$

valor que coincide con la energía cinética total del movimiento referido al sistema del centro de masa de cada tramo de escalera. A partir de aquí el cálculo es el mismo que antes, con el mismo resultado final.

3.5 Una varilla homogénea de masa m y longitud L, cuelga horizontalmente suspendida de dos hilos verticales sujetos a ambos lados del centro de la varilla y a la distancia x de él. Cortamos uno de los hilos. Calcular, en función de x, la tensión que soporta el otro hilo en el instante inmediato al corte.



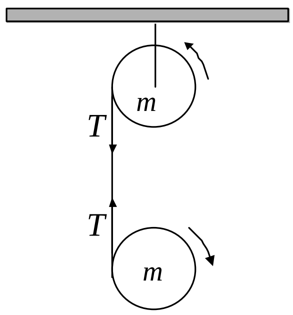
- Como el punto de suspensión no coincide con el centro de masa, y queremos calcular el valor de la tensión, fuerza que se aplica sobre el punto de suspensión, es aconsejable estudiar el movimiento como la combinación del movimiento de traslación del centro de masa, que satisface

$$mg - T = ma_{cm}$$
y del movimiento de rotación respecto al centro de masa, que satisface
$$Tx = I_{cm}\alpha$$
Como el punto de suspensión se mantiene siempre en reposo, se satisface además la condición de no deslizamiento
$$a_{cm} = \alpha x$$
siendo, en este caso, x el radio de giro del centro de masa respecto del punto de suspensión.

- Teniendo en cuenta que el momento de inercia de la barra de longitud respecto de un eje que pasa por su centro de masa es

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$$
podemos despejar de estas ecuaciones el valor de la tensión del hilo justo después del corte, obteniendo
$$T = \frac{mgI_{cm}}{mx^2 + I_{cm}} = \frac{mgL^2}{L^2 + 12x^2}$$
Cuando el hilo que no se ha roto está unido directamente al centro de masa, en cuyo caso $x = 0$, no existe rotación de la varilla, y se obtiene el valor conocido $T = mg$.

3.6 Las dos poleas de la figura son cilíndricas y tienen la misma masa m y radio R. Cuando el sistema se abandona a sí mismo, calcular las aceleraciones angulares de las poleas y la tensión de la cuerda.



- La polea superior mantiene un movimiento de rotación gobernado por la ecuación del movimiento

$$TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_1$$
de forma que le comunica a la cuerda que se desenrolla una aceleración lineal igual a
$$a_1 = \alpha_1 R$$
(Se supone que la cuerda no desliza en ningún momento sobre la polea superior)

- La polea inferior tiene dos movimientos, uno de rotación por el efecto del momento de fuerzas generado por la tensión de la cuerda

$$TR = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_2$$

y un movimiento de traslación en caída vertical por influencia del peso y la tensión de la cuerda

$$mg - T = ma_2$$

- Para poder resolver estas ecuaciones debemos imponer una condición adicional de deslizamiento de la cuerda sobre la polea inferior. Suponiendo que tal deslizamiento no se produce, el movimiento vertical de la cuerda debe coincidir con el movimiento de traslación del punto de contacto con la polea inferior. Es decir,

$$a_1 = a_2 - \alpha_2 R$$

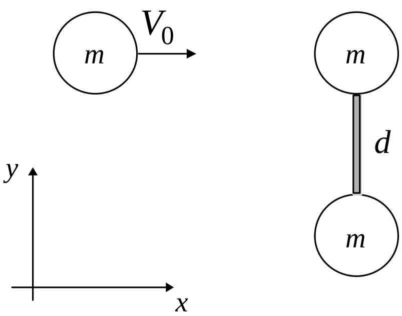
la aceleración lineal de la cuerda es igual a la aceleración lineal de la polea menos la aceleración lineal producida por el giro sobre sí misma.

- Con las ecuaciones anteriores calculamos las aceleraciones angulares y la tensión de la polea

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{5} \frac{g}{R}$$

$$T = \frac{1}{5} mg$$

3.7 Una masa puntual m se mueve con velocidad V_0, dirigida según el eje x, y choca con un sistema de dos masas m, en reposo, y unidas por una barra rígida de longitud, colocada en la dirección y. Después del choque, la masa incidente queda unida a una de las masas del sistema. Calcular la velocidad y posición del centro de masa y la velocidad angular del sistema alrededor del centro de masa después del choque. Calcular la energía perdida en el choque.



- Se conserva el movimiento del centro de masa y el momento angular respecto al centro de masa. La posición del centro de masa justo antes del choque viene dada por

$$2my = m(d - y)$$
$$y = \frac{1}{3}d$$
Se encuentra a una distancia d/3 del extremo donde quedan adheridas las dos masas m.

- La velocidad del centro de masa después del choque se obtiene de la ecuación de conservación del momento lineal

$$mV_0 = 3mV_{cm}$$
$$V_{cm} = \frac{1}{3}V_0$$
y está dirigida en la misma dirección que la velocidad V_0 de la masa incidente.

- En el movimiento de rotación respecto al centro de masa, cuya posición hemos calculado en el primer apartado, el momento angular respecto al centro de masa justo antes del choque es

$$L_i = mV_0 \frac{d}{3}$$
Después del choque, el sistema de masas se comporta como un sólido rígido, con un momento angular
$$L_f = I_{cm}w$$
siendo I_{cm} el momento de inercia de las masas respecto a su centro de masa, y w la velocidad angular de rotación del sistema respecto a su centro de masa. De la conservación del momento angular respecto al centro de masa, obtenemos la velocidad angular de giro después del choque
$$w = \frac{mV_0 d}{3I_{cm}}$$

- Conociendo las posiciones relativas de las masas, podemos deducir su momento de inercia

$$I_{cm} = 2m\left(\frac{d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}md^2$$
y de aquí, el valor de w
$$w = \frac{1}{2}\frac{V_0}{d}$$

- La energía cinética antes del choque es

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}mV_0^2$$

Después del choque, la energía cinética es suma de la energía cinética de traslación del centro de masa con velocidad V_{cm}, y la energía cinética de rotación respecto al centro de masa con velocidad angular w, resultando

$$E_{c,f}=\frac{1}{2}3mV_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}w^2=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4}\right)mV_0^2=\frac{1}{4}mV_0^2$$

La energía perdida en el choque es

$$E_{c,i}-E_{c,f}=\frac{1}{4}mV_0^2$$

equivale a la mitad de la energía inicial.

3.8 Un jugador de béisbol dispone de un bate, que es una barra homogénea de masa M y longitud D. Golpea la pelota a una distancia x del extremo libre. En el impacto ejerce una fuerza F durante un intervalo de tiempo dt muy corto. Calcular la velocidad angular del bate después del impacto, la velocidad lineal del punto donde el jugador sujeta el bate, y el valor de x para que el jugador no sienta en su mano el impacto de la pelota.

- Durante el impacto, la pelota comunica al bate un impulso de módulo

$$p=Fdt$$

Por conservación del momento lineal, la velocidad del centro de masa del bate después del impacto es

$$V_{cm}=\frac{Fdt}{M}$$

Además se conserva el momento angular respecto al centro de masa del bate. Inicialmente su valor es

$$L_i=p\left(\frac{D}{2}-x\right)=\frac{Fdt\left(D-2x\right)}{2}$$

y después del impacto, el bate gira como un sólido rígido con momento angular

$$L_f=I_{cm}w=\frac{1}{12}MD^2w$$

Por tanto, de la conservación del momento angular, obtenemos el valor de la velocidad angular de giro después del impacto

$$w=\frac{6Fdt\left(2D-x\right)}{MD^2}$$

- Una vez resuelto el problema de la dinámica del bate después del impacto, calculamos la velocidad lineal del punto P de la empuñadura, en forma vectorial

$$\vec{V}_P=\vec{V}_{cm}+\vec{w}\times\vec{r}_P$$

con módulo igual a

$$V_P = V_{cm} - w\frac{D}{2} = \frac{Fd\,t}{M}\left(\frac{6x}{D} - 2\right)$$

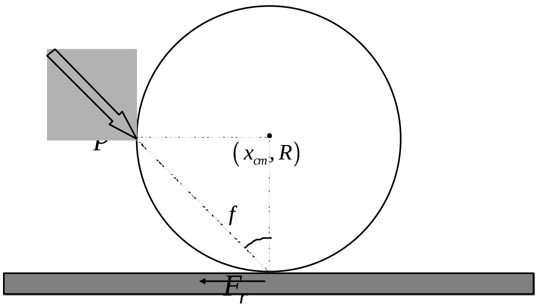
El jugador no siente el impacto si su mano no se mueve después del impacto, esto es, si la velocidad del punto P es cero. Para ello x debe ser igual a

$$x = \frac{D}{3}$$

Es decir, el jugador debe golpear la pelota a una distancia D/3 del extremo del bate.

Problemas Propuestos

3.9 Una bola de billar de masa M y radio R se golpea como indica la figura, comunicándole un impulso p,



iniciando su movimiento sobre una mesa horizontal que presenta un coeficiente de rozamiento m. Calcular:

a) **Velocidad del centro de masa y velocidad angular de giro en el instante inicial**

b) **la condición que debe verificar el ángulo de impacto f para que la bola deslice.**

c) **distancia que recorre la bola antes de iniciar el movimiento de retroceso**

d) **la condición que se debe cumplir para que se produzca el movimiento de retroceso**

e) **una vez iniciado el retroceso, distancia que recorre la bola antes de cambiar de régimen y rodar sin deslizar**

f) **velocidad del centro de masa y velocidad angular de giro en ese instante**

Solución:

a) $V_{cm} = \frac{p}{M}\sin f, \quad w = \frac{5}{2}\frac{p}{MR}\cos f$

b) La bola desliza para cualquier ángulo de impacto

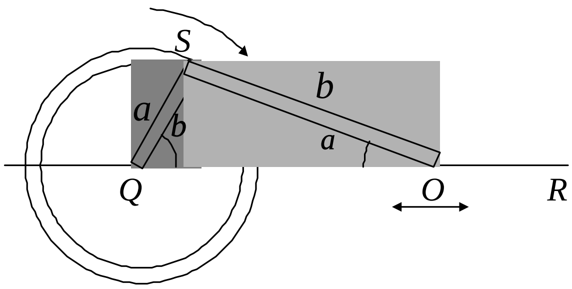
c) $x_{cm} - x_0 = \frac{p^2}{2mm^2 g}\sin^2 f$

d) $f > 45°$

$$\textbf{\textit{e)}}\quad x'_{cm} - x'_0 = \frac{25}{98}\frac{p^2}{mm^2 g}\left(\cos f - \sin f\right)^2$$

$$\textbf{\textit{f)}}\quad V'_{cm} = \frac{5}{7}\frac{p}{M}\left(\cos f - \sin f\right), \quad w = \frac{5}{7}\frac{p}{MR}\left(\cos f - \sin f\right)$$

3.10 **Una biela OS de longitud b está articulada con la manivela QS de longitud a. El extremo O se mueve a lo largo del eje QR sin sufrir rozamiento, y el punto Q está fijo.**



Determínese:

a) **la relación entre las velocidades angulares de OS y QS**

b) **¿qué tipo de movimiento realiza el sistema respecto al punto O ?**

c) **el centro instantáneo de rotación**

d) **¿en qué punto de la trayectoria conjunta el sistema realiza una traslación sin rotación?**

Solución:

$$\textbf{\textit{a)}}\quad \dot{a} = \frac{a}{b}\frac{\cos b}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2 b}}\dot{b}$$

b) traslación de O más rotación alrededor de O

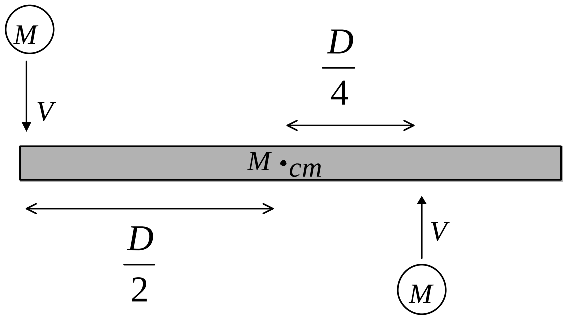
c) En el punto de corte de la recta radial dibujada desde Q y la recta vertical dibujada desde O

d) $b = 90°$

3.11 **Una pelota maciza de radio R rueda sin deslizar por un plano inclinado y sube por el interior de un anillo de radio d. Calcular la altura inicial h desde la que debe dejarse caer la pelota para que pueda describir el anillo.**

Solución: $h = \dfrac{27d - 17R}{10}$

3.12 **Dos proyectiles de masa M y velocidad V, se incrustan simultáneamente en una barra de masa M y longitud D. Una de las masas golpea a la barra en uno de sus extremos, y la otra golpea a la barra a una distancia $D/4$ del centro, incidiendo sobre ella del lado opuesto a la primera masa. Antes del impacto, la barra descansa en una mesa horizontal sin rozamiento. Calcular la velocidad angular de la barra, y las velocidades de sus extremos después del impacto.**



$$w = \frac{2}{9}\frac{V}{D}$$

Solución: $V_A = \dfrac{5}{54}V$

$$V_B = -\frac{2}{27}V$$